

PLANEJAMENTO DE REDES PLUVIOMÉTRICAS

*João Ignácio da Silva Filho*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
PROF. PEDRO GUERRERO-SALAZAR  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
PROF. PAULO CANEDO MAGALHÃES

  
\_\_\_\_\_  
PROF. JOSÉ MARQUES

SILVA FILHO, JOÃO IGNÁCIO da

Planejamento de Rede Pluviométrica

(Rio de Janeiro) 1982.

viii, 152 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1982)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. de Engenharia.

1. Pluviometria I.COPPE/UFRJ II. Título (Série)



AGRADECIMENTOS

A CAPES pela concessão de uma bolsa de estudo.

Ao professor Pedro Guerrero-Salazar pela segura e eficiente orientação dessa tese.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pelos ensinamentos ministrados em suas disciplinas.

A Superintendência Estadual de Rios e Lagoas (SERLA-RJ) pelas facilidades oferecidas na consulta de seu arquivo de pluviogramas.

A Sueli Braga pelo trabalho de datilografia.

A meus pais pelo carinho com que acompanharam meus estudos.

A Marília e meus filhos pela compreensão com que aceitaram a troca de horas de lazer por horas de pesquisa.

## R E S U M O

Crîtérios que permitem planejar e otimizar o sistema de coleta de dados de uma rede pluviométrica são discutidos neste trabalho. São apresentadas metodologias que permitem determinar a precisão com que a rede estima a altura média da precipitação sobre uma determinada área.

A análise da confiabilidade da informação com base: a) na variância relativa do erro, b) nos fatores de redução da variância pontual e c) na integração da superfície de precipitação, é usada no planejamento de redes operadas com o objetivo de estimar a média de um longo-termo da altura média sobre a área da precipitação acumulada em um longo período de tempo. É apresentado um caso exemplo para a rede pluviométrica da bacia do Rio Pardo (Estado de São Paulo).

Dois métodos, um considerando implícita e o outro explicitamente a configuração da rede, utilizados para otimizar redes que visam estimar a altura média da precipitação sobre a área quando da ocorrência de uma tempestade, são aqui discutidos. Estes dois enfoques são aplicados a rede pluviométrica da cidade do Rio de Janeiro.

## ABSTRACT

Planning and optimization criteria for rainfall network data collection system are discussed. Methodologies which quantify the accuracy of areal average rainfall estimates are presented.

Analysis of the information reliability based on: a) variance of relative error, b) in reduction factors and c) in integration of precipitation trend surface, is used for network planning operated to estimate the long-term mean total rainfall over a long period of time, averaged over a given region. A case-study with the Pardo river (São Paulo state) basin precipitation network is presented.

Two methods used for the design of network aiming total areal storm depth estimation, one considering implicit and the other explicitly the configuration are discussed. These two approaches are applied to the Rio de Janeiro city rainfall network.

# I N D I C E

## I. INTRODUÇÃO

I.1 - Dados Pluviométricos .....	01
I.2 - Rede Pluviométrica .....	04
I.3 - Fontes de Erros nos Dados Pluviométricos.....	06
I.4 - Objetivos do Trabalho .....	10

## II. METODOLOGIAS DE PLANEJAMENTO DE REDES PLUVIOMÉTRICAS

II.1 - Planejamento e Otimização de Rede Pluviométrica.	12
II.2 - O Custo da Rede .....	21
II.3 - A Precisão da Rede .....	23

## III. REDES COM O OBJETIVO DE ESTIMAR A MÉDIA SOBRE A ÁREA DA ALTURA DE PRECIPITAÇÃO ACUMULADA EM UM LONGO PERÍODO DE TEMPO

III.1 - Características Estatísticas .....	26
III.1.1 - Correlação Espacial .....	29
III.1.2 - Correlação Temporal .....	41
III.2 - Erro de Estimativa e Planejamento da Rede .....	43
III.2.1 - Método Prático .....	43
III.2.2 - Método da Variância Relativa do Erro.	45
III.2.3 - Método dos Fatores de Redução da Variância .....	47
III.2.4 - Método com Base na Integração da Superfície de Precipitação .....	58

IV. REDE PARA ESTIMAR A ALTURA MÉDIA DE PRECIPITAÇÃO SOBRE UMA ÁREA, QUANDO DA OCORRÊNCIA DE UMA TEMPESTADA ISOLADA	
IV.1 - Principais Características de uma Tempestade ..	68
IV.2 - Erro de Estimativa da Altura Média Sobre a Área.	74
IV.3 - A Otimização da Configuração da Rede .....	88
V. APLICAÇÃO DAS METODOLOGIAS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	
V.1 - Rede com o Objetivo de Estimar a Altura Média Sobre a Área, da Precipitação Média Anual .....	95
V.1.1 - Ajuste da Correlação Espacial .....	100
V.1.2 - O Planejamento da Rede .....	105
V.1.3 - Síntese dos Resultados .....	119
V.2 - Rede para Medir a Altura Média, Sobre a Área, da Precipitação de uma Tempestade Isolada .....	120
V.2.1 - Modelo de Área-Altura .....	123
V.2.2 - Função de Correlação com a Distância ...	131
V.2.3 - Objetivos da Rede .....	134
V.2.4 - Otimização da Rede .....	135
V.2.5 - Síntese dos Resultados .....	140
VI. CONCLUSÕES .....	145
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	148



## I. INTRODUÇÃO

### I.1 DADOS PLUVIOMÉTRICOS

O sucesso no planejamento do aproveitamento dos recursos hídricos de uma região está intimamente ligado ao grau de conhecimento que se tem de seu passado hidroclimatológico, obtido através da sequência de observações e medidas, efetuadas em alguns pontos da região, das diversas fases de interesse do ciclo hidrológico.

Uma das componentes mais importante deste ciclo é a precipitação atmosférica, sendo sua caracterização indispensável para o conhecimento do regime hidrológico da região. Assim como a maioria dos fenômenos meteorológicos, a precipitação é uma variável aleatória no tempo e no espaço, tornando-se então necessário quantificar sua variabilidade nestas duas dimensões.

Ao longo dos anos tem-se desenvolvido diversas técnicas e instrumentos para coletar informações das várias fases da precipitação pluvial. Uma das principais grandezas características da precipitação é a altura, que é a medida da quantidade de água caída e acumulada, num período de tempo, sobre uma superfície plana e impermeável. Esta altura é geralmente expressa em milímetros.

A precipitação é um fenômeno hidrometeorológico, que quando ocorre cobre extensas áreas da superfície terrestre, o que torna praticamente impossível realizar uma medição contínua

ao longo de toda área atingida. O procedimento usual para estimar a altura média de precipitação sobre uma dada área consis-te em:

- 1) Medir a altura da precipitação em alguns pontos da área, chamados de "postos ou estações pluviometri-cas", através de instrumentos denominados pluviomêtros ou pluviôgrafos; e
- 2) Aplicar ã estas medidas métodos e técnicas especiais de cálculo que permitam sua extrapolação para toda a área.

Deve-se notar que na atualidade a altura média de precipitação sobre uma área também pode ser quantificada, porêm com utilização ainda limitada, através de radar e mais recentemente pelo uso de fotos e imagens de satélite, técnica ainda em fase de pesquisa. O desenvolvimento desta técnica permitirá estimar a altura de precipitação em áreas de difícil acesso, tais como florestas e oceanos.

A medida pontual da altura de precipitação é feita a-través de dois tipos de instrumentos:

- 1) Pluviomêtro - que nada mais é do que um simples receptor de água pluvial, adequadamente calibrado; e

- 2) Pluviôgrafo - que além de medir, registra a altura de precipitação com o decorrer do tempo. O registro do pluviôgrafo é feito num diagrama de papel chamado de pluviograma, ou gravado em fita de papel ou magnética através de microprocessadores.

Segundo Biswas (1970), as primeiras medidas da altura de precipitação, através de pluviômetros, de que se tem notícias foram feitas na Índia por Kautilya no século IV A.C.. Outras tentativas de medir a precipitação ocorreram depois de Cristo no século I na Palestina, no século XIII na China e no século XV na Coreia. Na Europa as primeiras medidas de altura de precipitação foram feitas por Castelli por volta de 1639 na Itália.

Os dois primeiros tipos de aparelhos registradores de altura pluviométrica foram inventados pelo inglês Sir Christopher Wren, um dos quais foi mais tarde aperfeiçoado por Robert Hooke. Entretanto, somente no final do século XVII começou a ser difundido o interesse em medir sistematicamente a altura de precipitação, tendo sido então construído vários tipos de aparelhos de medição.

No Brasil, as primeiras medidas de altura de precipitação ocorreram na segunda metade do século passado. Em 1855, foi instalado no município de Nova Lima, em Minas Gerais, um pluviômetro de procedência inglesa, pela Mineração Morro Velho. No ano de 1884 começou a ser operada uma estação pluviométrica em Curitiba pelo então Serviço de Meteorologia do Ministério da Agri

cultura (SMMA). No início deste século intensificaram-se as medições de altura de precipitação no país, principalmente na região nordeste pela Inspetoria Federal de Obras Contra a Seca (atual DNOCS), e na região de São Paulo pela Light (atual Ele-tropaulo).

Atualmente existem no Brasil diversas entidades mante<sup>ne</sup>nedoras de estações pluviométricas, entre as quais se pode ci-tar na esfera federal o Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), o Departamento Nacional de Água e Energia Elétrica (DNAEE), o Departamento Nacional de Obras Contra a Seca (DNOCS), além dos órgãos ligados às Secretarias Estaduais de Agricultura.

O DNAEE, está gerenciando um banco de dados pluviomê-tricos que tem como objetivo armazenar os dados coletados nas diversas regiões do Brasil, e através da publicação intitulada "Inventário de Estações Pluviométricas" mantém atualizada uma relação das estações pluviométricas que estão em funcionamento, ou que funcionaram no país. Outro órgão que também está transfe-rindo as informações coletadas em sua rede para fita magnética, o que facilita sua utilização em computadores digitais, é o Ins-tituto Nacional de Meteorologia.

## I.2 REDE PLUVIOMÉTRICA

A definição de rede meteorológica tem gerado algumas controvérsias. Até alguns anos atrás, uma rede era descrita a-penas em termos do número de estações instaladas para a coleta de dados numa certa área. Entretanto, este enfoque não tem sido

considerado suficiente, tendo alguns autores propostos diversas definições de rede.

Langbein (1965), define uma rede meteorológica como sendo um sistema organizado para a coleta de informações de um fenômeno meteorológico específico. As partes componentes da rede devem ser relacionadas entre si, de tal forma que cada estação, ponto ou região de observação preencha um ou mais objetivos no tempo e no espaço.

Uma rede meteorológica pode ser também considerada como sendo um programa para aquisição, processamento e divulgação sistemática da informação requerida (Rodda et al, 1969).

Para Moss e Villeneuve (1975), uma rede é formada por todos os pontos da região, pois pode-se a partir dos dados coletados nos pontos com medição, estimar os dados em pontos onde eles não foram medidos, através de técnicas e fórmulas matemáticas.

Uma rede pluviométrica neste trabalho será definida como sendo "um sistema de coleta (através de postos pluviométricos ou pluviográficos), processamento e divulgação da quantidade de precipitação numa região, com a finalidade de fornecer as informações necessárias para o conhecimento da disponibilidade hídrica da região em termos de precipitação".

É recomendável que a definição da amostragem da precipitação ou de qualquer fenômeno meteorológico, seja realizada co-

mo parte de um programa pr -planejado para implantação do sistema de coleta de dados da rede e da modelagem do fen meno. A escolha das variáveis a serem medidas, os locais e as taxas de amostragem dependem dos objetivos do programa e dos tipos de modelos usados para sintetizar ou representar o sistema (Rodr gues - Iturbe e Mejía, 1974). Porém nem sempre   possível definir com antecedência todos os objetivos que a rede virá a atender, tendo em vista que o próprio desenvolvimento econ mico da região pode alterar os objetivos iniciais da rede.

Em geral, as estações pluviométricas de uma região tem sido localizadas e instaladas sem atender as recomendações de um planejamento com base científica. Entretanto, a partir dos dados coletados nestas estações, pode-se avaliar a rede segundo seus diversos objetivos, definindo-se a necessidade de implantar novos pontos de amostragem e/ou desativar outros; de modo a se obter um sistema de observação que permita uma confiável estimativa das variáveis envolvidas com o menor esforço e custo possível.

### 1.3 FONTES DE ERROS NOS DADOS PLUVIOMÉTRICOS

A sequência cronológica das alturas de precipitações observadas em um local, constitui uma série temporal de precipitação. Estas séries, servem de base para os estudos e projetos que envolvem a análise da precipitação, e são formadas por períodos mais ou menos longos, contínuos ou descontínuos.

Os métodos estatísticos de análise destas séries exigem que suas componentes sejam homogêneas. Entretanto, na cole

ta, processamento ou divulgação dos dados podem ser introduzidos erros sistemáticos, que tornam a série heterogênea. Os erros nos dados pluviométricos são causados principalmente por:

A) Na observação:

- 1) Deslocamento do instrumento de medida. Este fato ocorre principalmente em áreas pouco habitadas, quando em consequência da mudança do observador, a estação é transferida de local, permanecendo entretanto com o seu antigo nome. Habitualmente estes deslocamentos são da ordem de alguns quilômetros e nem sempre os erros introduzidos na série devido a esta mudança podem ser detectados, principalmente em áreas com relevo plano onde a vizinhança relativa do instrumento não se modifica muito.
- 2) Modificações da vizinhança do instrumento de medida. O instrumento de medida deve ser instalado em um local que permita a perfeita circulação do ar em torno do mesmo. Entretanto, a área ao redor do instrumento pode sofrer modificações, que podem ser bruscas (construção muito próxima) ou progressivas (crescimento de árvores), alterando-se com isto o fluxo natural do ar ao redor do instrumento o que modifica a altura de precipitação na estação.

- 3) Deformação da superfície receptora. Apesar da boca dos pluviômetros e pluviôgrafos terem um anel usinado, alguns destes aparelhos por defeito de fabricação, instalação ou operação tem a boca ovalada alterando a área de recepção de chuva. Acrescenta-se aqui o fato de que este erro é de difícil detecção em virtude do mesmo ser de pequena monta.
- 4) Defeito na proveta. As provetas de leitura dos pluviômetros são em muitos casos de fabricação grosseira, podendo-se encontrar provetas variando de 9,5 mm a 10,5 mm. Erros também podem resultar quanto ao uso da proveta não adequada para a área receptora de precipitação.
- 5) Entupimento da tubulação. Na entrada da tubulação há uma tela de proteção que não permite a entrada no instrumento de medida de insetos mortos, folhas de árvores, pedaços de galhos ou qualquer outra sujeira prejudicial ao seu perfeito funcionamento. Entretanto, a tela de proteção às vezes se deteriora permitindo o entupimento do aparelho.
- 6) Falha humana. Em geral os operadores dos postos pluviométricos não possuem nenhum treinamento especializado, e quase sempre são mal remunerados. É comum a anotação do dado na caderneta de campo de forma imprecisa, tornando difícil a sua leitura posteriormente. Nos pluviôgrafos a troca dos pluviogra



mas e a colocação da tinta na pena registradora requer certos cuidados que nem sempre são seguidos pelos operadores das estações, fazendo com que as medidas sejam efetuadas de maneira imprecisa.

#### B) No processamento e na divulgação

A transcrição dos dados, anotados nas cadernetas de campo quando da leitura do pluviômetro ou obtidos diretamente dos pluviogramas, para as publicações ou fitas magnéticas utilizáveis em computadores digitais é um processo moroso feito quase que manual<sup>mente</sup>, nem sempre por pessoas especializadas, sendo portanto uma fase sujeita a introdução de erros na série de precipitação. Normalmente, a transcri<sup>ção</sup> dos dados para fita magnética é antecedida da perfuração de cartões, copiando-se os dados direta<sup>mente</sup> de formulários apropriados ou através de equi<sup>pamentos</sup> especializados, que digitalizam a curva traçada nos pluviogramas. Ressalta-se aqui que atualmente existem no Brasil diversas entidades utilizando esses equi<sup>pamentos</sup> para a digitalização de pluviogramas. Res<sup>salta</sup>-se ainda que este tipo de erro é praticamente eliminado nas estações ditas automáticas, onde as informações coletadas são gravadas com o auxí<sup>lio</sup> de um microprocessador diretamente na fita mag<sup>nética</sup>.

Com a finalidade de detectar os possíveis erros nas séries de precipitação, tem-se desenvolvido métodos que permiti-

tem a análise de sua homogeneidade, sendo que entre estes métodos o mais usado é o de dupla-massa.

Pelo exposto neste parágrafo, ao se utilizar uma série de dados pluviométricos a primeira providência a ser tomada é a de verificar a sua homogeneidade. Todavia, como os dados a serem utilizados neste trabalho:

- a) ou constam de publicação onde algumas séries já sofreram preenchimento de lacunas, o que leva a se aceitar a hipótese de que os dados já foram devidamente criticados;
- b) ou foram lidos diretamente de pluviogramas, tendo sido possível fazer leituras com a precisão suficiente,

achou-se desnecessário submetê-los a outros testes de consistência e homogeneidade.

#### I.4 OBJETIVOS DO TRABALHO

Com a crescente necessidade de se conhecer os recursos hídricos de uma região, muitas vezes há um crescimento desordenado de seu sistema de coleta de dados hidrometeorológicos, ocasionando a multiplicação desnecessária do número de estações.

Objetivando a contribuir com o desenvolvimento de um sistema racional de coleta de dados pluviométricos no Brasil, este trabalho se propõe a:

- 1) Apresentar os critérios normalmente usados para a instalação, com base científica, de um sistema de coleta de dados pluviométricos;
- 2) Apresentar alguns métodos de planejamento de redes pluviométricas que têm a finalidade de estimar:
  - a) a altura média da precipitação acumulada em um longo período de tempo em uma dada área;
  - b) a quantidade de precipitação sobre uma área quando da ocorrência de uma tempestade isolada

Para atingir os objetivos propostos, no capítulo II deste trabalho são apresentados os critérios gerais de planejamento e otimização de uma rede pluviométrica. No capítulo III são discutidas algumas metodologias de dimensionamento da densidade de estações de uma rede com o objetivo de estimar a altura média da precipitação média de um longo período de tempo em uma dada área. As metodologias de dimensionamento de redes com o objetivo de estimar a altura média, sobre uma área, da precipitação oriunda de uma tempestade isolada são discutidas no capítulo IV.

No capítulo V é discutida a aplicação das metodologias aqui apresentadas às séries de dados pluviométricos coletados na bacia do rio Pardo, no Estado de São Paulo, e na cidade do Rio de Janeiro. As conclusões do trabalho encontram-se no capítulo VI.

## II. METODOLOGIAS DE PLANEJAMENTO DE REDES PLUVIOMÉTRICAS

### II.1 PLANEJAMENTO E OTIMIZAÇÃO DE REDE PLUVIOMÉTRICA

Em geral, nas regiões economicamente desenvolvidas as redes pluviométricas são relativamente densas, com longos períodos de observações, tornando-se imprescindível o estabelecimento na região de uma rede de densidade ótima, evitando-se com isto a multiplicação desnecessária do número de estações.

Por outro lado, nas regiões em desenvolvimento é, na maioria dos casos, impraticável a implantação de uma rede ótima, pelo simples fato de não se dispor das informações necessárias à otimização da rede. Nestas regiões, o primeiro passo deve ser a implantação de uma rede pluviométrica que contenha um número de estações que experiências anteriores indicaram ser o mínimo necessário para o desenvolvimento econômico dos recursos hídricos de regiões semelhantes a estudada.

Após a implantação e operação desta rede por um período de tempo suficientemente longo para fornecer os dados necessários a uma otimização, é importante que se evide esforços no sentido de que se processe a determinação de uma rede de densidade ótima.

A rede de densidade mínima permite a obtenção das alturas de precipitação de uma forma menos dispendiosa. Porém, pe

lo fato da pequena densidade de estação da rede mínima, é muito importante que as medidas efetuadas em todas as estações sejam de boa qualidade.

O problema de otimização de uma rede pluviométrica, consiste basicamente em determinar o número e a localização dos pontos de medição na área em estudo, de modo a se obter a melhor estimativa  $\hat{P}$  da verdadeira altura média de precipitação  $\bar{P}$  sobre a área. Associada a melhor estimativa de  $\bar{P}$  tem-se um benefício resultante do grau de conhecimento do seu verdadeiro valor.

Desta forma, o planejamento de rede pluviométrica deveria sempre ser baseado em critérios econômicos, do tipo benefício-custo. Entretanto, nem sempre é possível estabelecer esta relação uma vez que não se pode definir com antecedência todos os benefícios provenientes do maior ou menor conhecimento da variável medida.

Rodda et al (1969) classificam as redes hidrometeorológicas, em função do nível da informação coletada, em três categorias:

- Nível 1: As redes deste nível devem fornecer uma primeira informação, a nível nacional ou regional, da variável medida de maneira que se possa obter uma estimativa, ainda que superficial, dos recursos hídricos da região;

- Nível 2: Neste caso espera-se que a rede dê todas as informações necessárias para o planejamento do aproveitamento dos recursos hídricos de uma sub-região, normalmente uma bacia;
- Nível 3: As informações colhidas nas redes deste tipo, são restritas a um sistema de coleta de dados com a finalidade de fornecer informações para a solução de problemas específicos.

As redes para coleta de informações do nível 3, podem ser planejadas sob o enfoque de benefício-custo, pois em geral elas fazem parte de um programa pré-planejado de aproveitamento dos recursos naturais em um determinado local, possibilitando uma avaliação econômica do maior ou menor conhecimento da variável a ser medida.

Entretanto, esta previsão se torna mais difícil ou quase impossível, quando se trata de sistemas de coletas de dados dos níveis 1 e 2, onde se está interessado em estimar a variável a nível regional. Nestes casos, pode-se usar como critério de projeto da rede uma relação entre o erro cometido na estimativa da altura de precipitação e o custo da rede.

Em termos gerais, a otimização da rede pluviométrica para os níveis de informação 1 e 2, é a solução do problema de programação não linear sem restrições dado por (Bras e Rodrigues-Iturbe, 1976):

$$\min_{\bar{U}, \bar{p}, N} \phi(\bar{U}, \bar{p}, N) = E(\bar{U}, \bar{p}, N) + f.C(\bar{U}, N) \quad (II.1)$$

onde:

$\bar{U}$  é uma matriz (2xN) com as coordenadas geográficas (x,y) dos N postos pluviométricos que compõem a rede;

$\bar{p}$  é um vetor de tamanho N, sendo que  $p_i$  é o peso atribuído à estação i para o cálculo da média da altura de precipitação sobre a área, dependendo portanto do modelo usado para sintetizar os dados;

$E(.)$  é o erro cometido na estimativa da altura média de precipitação sobre a área, sendo então a medida da precisão da rede;

$C(.)$  é o custo da rede; e

f é o fator de ponderação entre o custo e a precisão da rede, isto é, ele mede a variação da precisão da rede equivalente a uma variação unitário no custo.

A equação (II.1) mostra que para um dado valor de f existe uma relação inversa entre as suas parcelas, ou seja, quando  $C(\bar{U}, N)$  aumenta  $E(\bar{U}, \bar{p}, N)$  diminui. Resolvendo o problema para diversos valores de f é possível traçar a curva da figura II.1, que é a curva de transformação entre os termos: custo e precisão.

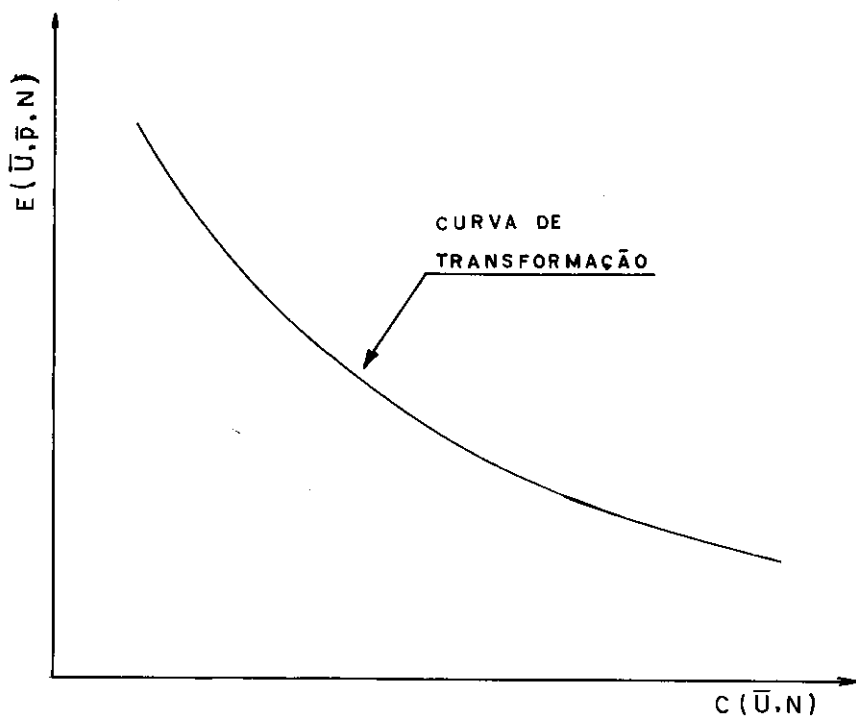


FIGURA II.1 - Combinação ótima entre o custo e a precisão da rede, para um dado  $f$ .

Como cada ponto desta curva representa, para um dado  $f$ , o valor do custo associado a uma precisão que minimiza a função objetivo (II.1), conclui-se que ela é a fronteira de todas as possíveis combinações dos termos: erro na estimativa e custo. As demais soluções que correspondem aos pontos acima da curva possuem erros na estimativa, custos, ou ambos, maiores que os pontos da curva.

Ainda que esta curva não indique a solução ótima para o problema global de projeto de rede, uma vez que para isto seria necessário o conhecimento prévio de todos os usos, no futuro, dos dados que a rede coletará, ela é muito útil numa tomada de



decisão, pois permite ao projetista uma visão do quanto a precisão da rede cresce ou decresce em torno de um certo custo (Lenton e Rodrigues-Iturbe, 1977).

Na prática, é um procedimento comum fixar anteriormente ao projeto da rede o seu orçamento ou a precisão desejada para a variável hidrometeorológica de interesse. A consideração deste fato permite uma simplificação muito grande no problema da do pela equação (II.1), uma vez que se torna possível fixar um dos termos e minimizar a função objetivo em relação ao outro termo. Neste caso, dois enfoques podem ser utilizados no planejamento da rede (Rodrigues-Iturbe e Mejía, 1974):

- 1) A rede é operada com orçamento pré-fixado, sendo planejada no sentido de minimizar o erro de estimativa da variável envolvida reduzindo o problema a:

$$\min_{\bar{U}, \bar{p}, N} E(\bar{U}, \bar{p}, N) \quad (\text{II.2})$$

sujeito a

$$C(\bar{U}, N) \leq B$$

onde B é o orçamento pré-fixado.

- 2) A rede é operada de maneira a se ter um erro máximo aceitável, e o seu planejamento é feito visando o menor custo possível. O problema dado por (II.1) se reduz a:

$$\min_{\bar{U}, N} C(\bar{U}, N) \quad (II.3)$$

sujeito a

$$E(\bar{U}, \bar{p}, N) \leq E_{\max}$$

onde  $E_{\max}$  é o erro máximo aceitável.

A solução ótima dos problemas de programação não linear dados por (II.1), (II.2) e (II.3) só será encontrada se forem consideradas simultaneamente todas as variáveis  $(\bar{U}, \bar{p}, N)$  envolvidas, pois caso contrário obter-se-á uma solução sub-ótima. Entretanto, por razões metodológicas e para maior facilidade de cálculo Lenton e Rodrigues-Iturbe (1977) sugerem a divisão do problema global em dois subproblemas sequenciais, uma vez que na prática se trabalha com soluções sub-ótimas conforme será mostrado mais adiante.

O primeiro subproblema pode ser posto como sendo o de minimizar o custo e o erro com respeito as variáveis  $\bar{U}$  e  $N$  fixando-se anteriormente o valor de  $\bar{p}$ . Em termos gerais tem-se:

$$\min_{\substack{\bar{U}, N \\ \bar{p}_0 \text{ fixo}}} E(\bar{U}, \bar{p}_0, N) + f C(\bar{U}, N) \quad (II.4)$$

O segundo subproblema, consiste em minimizar o erro com respeito a  $\bar{p}$  considerando os valores ótimos  $\bar{U}^*$  e  $N^*$  encontrados no primeiro passo. Em termos gerais tem-se:

$$\min_{\bar{p}} E(\bar{U}^*, \bar{p}, N^*) \quad (\text{II.5})$$

Ainda que não sejam encontrados os valores ótimos globais, este procedimento de otimizar a rede em dois estágios, apresenta as seguintes vantagens:

- 1) Os cálculos sofrem uma redução considerável, uma vez que o número de variáveis foi reduzido de 1/3 no primeiro subproblema que ainda permanece não linear. A solução do segundo subproblema que envolve apenas o termo do erro é dada pela resolução de um sistema de equações lineares.
- 2) A divisão do problema global em dois subproblemas sequenciais reflete exatamente o procedimento usado na prática, onde os valores sub-ótimos de  $\bar{U}$  e  $N$  são determinados durante o estágio de coleta dos dados e os valores de  $\bar{p}$  no estágio de processamento.
- 3) Em alguns casos, a rede é projetada para as características médias da variável meteorológica envolvida, e a divisão do problema em dois permite que durante o estágio de processamento de dados se possa otimizar os pesos para os valores de altura de precipitação realmente ocorrida.

Ressalta-se aqui que o objetivo deste trabalho está voltado para o dimensionamento do sistema de coleta de dados de uma rede pluviométrica, e portanto só discutirá a otimização do primeiro subproblema.

Para a solução do primeiro subproblema, equação (II.4), é aconselhável fixar o valor de  $\bar{p}$  em:

$$p_i = 1/N \quad , \quad i=1, \dots, N \quad (II.6)$$

os quais são aproximadamente ótimos quando as estações são uniformemente distribuídas. Este primeiro estágio dos problemas da dos pelas equações (II.1), (II.2) e (II.3) pode ser formulado em termos gerais por:

$$\min_{\bar{U}, N} G(\bar{U}, N) \quad (II.7)$$

onde  $G(\bar{U}, N)$  contém o termo do custo, do erro ou ambos. Nos problemas (II.2) e (II.3) devem ser consideradas também as restrições de cada um.

Uma vez que no problema de otimização da rede são ter mos chaves: a precisão e o custo da rede, será discutido a seguir separadamente as metodologias para o cálculo de cada um des tes fatores.

## II.2 O CUSTO DA REDE

A rede pluviométrica foi definida como sendo composta de uma fase de coleta de dados e de uma fase de processamento e divulgação destes dados. Desta forma, o custo da rede pluviométrica é a soma dos custos de cada uma destas fases, isto é, a soma dos custos de instalação, manutenção e operação do sistema de coleta de dados e do sistema de processamento e divulgação dos dados.

O custo de instalação de cada um destes sistemas depende de muitos fatores, entre eles, o tipo e a qualidade dos instrumentos usados, bem como do grau de sofisticação do sistema de processamento e divulgação. Entretanto, esta parcela do custo global pode ser amortizada ao longo da vida útil da rede, possibilitando desta forma, caracterizar o custo total anual pelo custo anual de operação e manutenção de cada um dos sistemas.

O custo total anual do sistema de coleta de dados  $C_c$  pode ser caracterizado, principalmente, pela localização do posto na área em estudo. Como a operação e manutenção de um posto pode ser considerada independente dos outros postos da rede, o custo  $C_c$  é dado pelo somatório linear dos custos em uma particular localidade  $u_i$ , ou seja:

$$C_c = \sum_{i=1}^N C(u_i) \quad (II.8)$$

O custo total anual do sistema de processamento e divulgação dos dados,  $C_p$ , pode ser considerado como sendo independente da localização dos postos, pois geralmente esta fase é executada num escritório central.

O custo total anual da rede é então dado por:

$$C(\bar{U}, N) = C_p + \sum_{i=1}^N C(u_i) \quad (II.9)$$

Gandin e Kagan (1967) admitem que em certos casos o custo do sistema de coleta de dados pode ser independente da localização dos postos, é o caso de bacias urbanas por exemplo, o que torna então o custo de coleta igual em todos os postos, resultando a equação (II.9) em:

$$C(N) = C_p + N c \quad (II.10)$$

onde  $c$  é o custo da coleta em cada posto.

Se a rede é operada segundo um orçamento pré-fixado e o custo independe da configuração da rede, o problema de programação matemática dado por (II.2) pode ser simplificado. Neste caso o custo passa a ser apenas função de  $N$ , e o número ótimo de estações  $N^*$  pode ser determinado pela equação (II.10), isto é:

$$N^* = (B - C_p)/c \quad (II.11)$$

onde  $B$  é o orçamento pré-fixado.

Calculado  $N^*$ , a melhor configuração da rede é a solu  
ção do problema:

$$\min_{\bar{U}, \bar{p}} E(\bar{U}, \bar{p}, N^*) \quad (II.12)$$

isto é, o problema passa a ser o de minimizar o erro cometido na amostragem.

### II.3 A PRECISÃO DA REDE

Dada a configuração da rede hidrometeorológica de uma região pode-se, através de uma análise estatística dos dados ob  
servados, determinar o erro médio cometido ao transferir infor-  
mações dos dados de um ponto medido (local com estação) para um  
ponto não medido; ou ainda determinar o erro médio que se come-  
te ao calcular, a partir dos pontos medidos, o valor médio dos  
dados sobre a área.

A altura de precipitação medida nos postos da rede plu-  
viométrica, pode ser usada para estimar as seguintes quantidades  
de precipitação não medidas diretamente pela rede (Jones et al,  
1979):

- 1) A altura total de precipitação acumulada em um particular in  
tervalo de tempo num dado ponto;

- 2) A altura média de um longo período de tempo da precipitação acumulada num dado ponto;
- 3) O valor médio sobre a área da altura de precipitação acumulada em um particular intervalo de tempo; e
- 4) A média de um longo período da altura média sobre a área da precipitação acumulada em um dado intervalo de tempo.

Como a maioria dos estudos hidrológicos que envolvem a precipitação utilizam o seu valor médio sobre a área, Rodrigues-Iturbe e Mejía (1974) sugerem os dois objetivos principais a que a rede deve atender:

- 1) Estimativa da altura média da precipitação acumulada em um longo período de tempo sobre uma área, e
- 2) Estimativa da precipitação média sobre uma área quando da ocorrência de uma tempestade isolada.

A precisão da rede pluviométrica pode ser analisada em termos do erro médio quadrático cometido na estimativa  $\hat{P}$  da verdadeira altura média de precipitação  $\bar{P}$ , acumulada sobre a área seja em um longo período de tempo ou em uma tempestade isolada. Em termos gerais, o erro médio quadrático é dado por:

$$EMQ = E(\bar{U}, \bar{p}, N) = E \left[ (\bar{P} - \hat{P})^2 \right] \quad (II.13)$$



Como o cálculo do EMQ para cada um dos dois últimos ob  
jetivos citados se diferem entre si, eles serão discutidos sepa  
radamente nos capítulos III e IV respectivamente.

### III. REDES COM O OBJETIVO DE ESTIMAR A MÉDIA SOBRE A ÁREA DA ALTURA DE PRECIPITAÇÃO ACUMULADA EM UM LONGO PERÍODO DE TEMPO

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos de cálculo do erro cometido na estimativa da altura média da precipitação acumulada sobre uma área em um longo período de tempo. Uma vez calculado este erro é possível estimar o número mínimo de estações que a rede deve ter e assim analisar a quantidade de informação, com um erro aceitável, pelo menor custo. Desta forma, os métodos aqui apresentados solucionam o problema de otimização dado pela equação (II.3), desde que se considere o custo da estação independente de sua localização.

#### III.1 CARACTERÍSTICAS ESTATÍSTICAS

Enfocando a altura de precipitação como sendo um processo aleatório multidimensional,  $P(u,t)$ , função do tempo  $t$  e das coordenadas espaciais do ponto  $u$ , serão definidas algumas características estatísticas deste tipo de variável, as quais são usadas no planejamento de redes pluviométricas.

O desvio da altura de precipitação acumulada num ponto  $u$  de coordenadas  $(x,y)$ , em um dado intervalo de tempo  $t$ , em relação ao seu valor médio obtido de um longo período de tempo  $T$  é dado por:

$$P'(u,t) = P(u,t) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T P_i(u,t) \quad (\text{III.1})$$

ou simplificando a notação

$$P'(u) = P(u) - \bar{P}(u) \quad (\text{III.2})$$

onde o apóstrofo e a barra representam respectivamente o desvio e média da altura de precipitação  $P$ .

Para a expressão (III.2), se tem:

$$E \left[ P'(u) \right] = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\text{Var} \{ P(u) \} = E \left\{ \left[ P'(u) \right]^2 \right\} = \text{Var} \left[ u \right] \quad (\text{III.4})$$

Considerando dois pontos distintos  $u_1$  e  $u_2$ , a função de estrutura de  $P$  pode ser definida como:

$$b(u_1, u_2) = E \left\{ \left[ P'(u_1) - P'(u_2) \right]^2 \right\}; \quad (\text{III.5})$$

e a covariância por:

$$\text{Cov} (u_1, u_2) = E \left[ P'(u_1) \cdot P'(u_2) \right]. \quad (\text{III.6})$$

Para  $u_1 = u_2$ , se tem  $\text{cov} \left[ u_1, u_1 \right] = \text{Var} \left[ u \right]$ .

A função de estrutura pode ser relacionada com a covariância através da expressão:

$$b(u_1, u_2) = \text{Var}(u_1) + \text{Var}(u_2) - 2\text{cov}(u_1, u_2) \quad (\text{III.7})$$

Padronizando os valores de  $P'(u)$  com o desvio padrão de  $P(u)$ , obtêm-se a função de estrutura padronizada:

$$B(u_1, u_2) = E \left\{ \left[ \frac{P'(u_1)}{\sqrt{\text{Var}(u_1)}} - \frac{P'(u_2)}{\sqrt{\text{Var}(u_2)}} \right]^2 \right\} ; \quad (\text{III.8})$$

sendo que neste caso a função de covariância se transforma na função de correlação:

$$r(u_1, u_2) = \frac{\text{cov} [u_1, u_2]}{\sqrt{\text{Var}(u_1) \text{Var}(u_2)}} \quad (\text{III.9})$$

A relação entre a função de estrutura padronizada e a função de correlação é:

$$B(u_1, u_2) = 2 - 2r(u_1, u_2) \quad (\text{III.10})$$

Rodríguez-Iturbe e Mejía (1974) assumem que  $P(u, t)$  é um processo estacionário e que a função de correlação pode ser separada em termos de suas correlações: espacial e temporal. Neste caso a covariância é dada por:

$$\text{Cov} \left[ P(u_1, t), P(u_2, t') \right] = \text{Var} [u] \cdot r(u_1 - u_2) \cdot r^*(t - t') \quad (\text{III.11})$$

onde  $r(u_1-u_2)$  é a função de correlação espacial e  $r^*(t-t')$  é a função de correlação temporal.

Desta forma é de supra importância o conhecimento da estrutura de correlação, tanto no espaço como no tempo, para a análise da variabilidade da informação.

### III.1.1 Correlação Espacial

A associação linear existente entre as alturas de precipitação medidas simultaneamente em dois postos pluviométricos é avaliada pelo coeficiente de correlação espacial, o qual pode ser estimado a partir de uma amostra de N dados simultâneos por:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(u_1) P_i(u_2) - N \bar{P}(u_1) \bar{P}(u_2)}{\left[ \sum_{i=1}^N P_i^2(u_1) - N(\bar{P}(u_1))^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{i=1}^N P_i^2(u_2) - N(\bar{P}(u_2))^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{III.12})$$

Vários são os fatores meteorológicos que influenciam a variabilidade espacial da precipitação em uma região. Caffey (1967), divide estes fatores em climáticos e sinóticos. Fatores climáticos resultam principalmente da localização da Terra no espaço, da circulação geral da atmosfera e da proximidade da região com proeminências geográficas tais como: oceanos e barreiras orográficas. Fatores sinóticos são aqueles que mudam dia a dia, ou de período para período, e resultam principalmente do movimento dos sistemas de pressão atmosférica que por sua vez ocasionam o deslocamento de grandes massas de ar.

Devido a ocorrência destes fatores meteorológicos, pode-se dizer que a correlação linear entre as séries de alturas de precipitação das estações de uma rede:

- 1) decresce com o período de tempo de acumulação considerado, ou seja a correlação entre as alturas de precipitação acumuladas anualmente é maior que as acumuladas diariamente, uma vez que na anual o efeito sinótico é amenizado;
- 2) decresce com o aumento da distância, pois os fatores meteorológicos tendem a ser homogêneos sobre uma área restrita, e vai mudando gradativamente com a distância.

Com base nestes fatos, a correlação espacial entre as estações pluviométricas de uma área pode ser representada por uma função monótona e decrescente, que expresse seu declínio com a distância. Os diversos modelos que têm sido propostos para representar a correlação com a distância, levam em consideração se o processo sobre a área é anisotrópico ou isotrópico.

A) Correlação espacial em áreas homogêneas e isotrópicas

A altura de precipitação sobre uma área é estatisticamente homogênea com respeito a função de correlação, se a função para um par de pontos  $(u_1, u_2)$  não muda com a transferência destes pontos para qualquer local da área, desde que não se altere a distância e a direção do primeiro para o segundo ponto. Isto é, a função de correlação é homogênea em uma área quando

não depende dos vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  separadamente mas apenas do vetor  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ , onde  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são os vetores radiais dos pontos  $u_1$  e  $u_2$ .

Por exemplo, para a distribuição de pontos mostrados na figura III.1, a área é homogênea em relação a função de correlação se as relações  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = r(\vec{u}_7, \vec{u}_8)$  ;  $r(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = r(\vec{u}_9, \vec{u}_{10})$  ;  $r(\vec{u}_5, \vec{u}_6) = r(\vec{u}_{11}, \vec{u}_{12})$  são válidas, mas é evidente que  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq r(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$  pois as direções são diferentes e  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq r(\vec{u}_5, \vec{u}_6)$  pois as distâncias são diferentes.

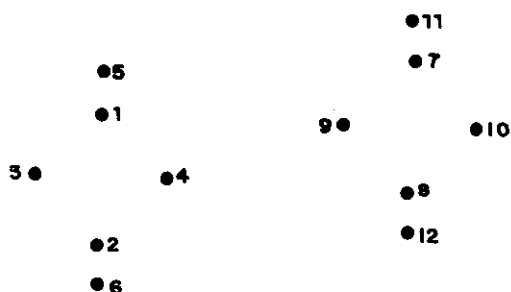


Figura III.1 - Definição de área homogênea e isotrópica,  
Gandin (1963)

Se a função de correlação, das alturas de precipitação em uma área, não depende de  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  separadamente mas do vetor  $\vec{r} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$  e do escalar  $d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ , diz-se que a área é isotrópica com respeito a função de correlação. Isto é, a função de correlação em áreas isotrópicas não varia quando os pontos  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são transferidos sobre a área, de tal modo que a distância e a posição do centro do segmento que une os dois pontos permaneçam os mesmos.

Na figura III.1, se a área é isotrópica, então  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = r(\vec{u}_3, \vec{u}_4)$  e  $r(\vec{u}_7, \vec{u}_8) = r(\vec{u}_9, \vec{u}_{10})$ , entretanto  $r(\vec{u}_3, \vec{u}_4) \neq r(\vec{u}_5, \vec{u}_6)$  pois, as distâncias são diferentes e  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq r(\vec{u}_9, \vec{u}_{10})$  pois é diferente a posição do centro dos segmentos que une os pontos.

Se a área é homogênea e isotrópica com respeito a função de correlação, então esta função depende apenas da distância  $d$  entre os pontos, e pode-se escrever para a figura III.1 que  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = r(\vec{u}_3, \vec{u}_4) = r(\vec{u}_7, \vec{u}_8) = r(\vec{u}_9, \vec{u}_{10})$ ;  $r(\vec{u}_1, \vec{u}_6) = r(\vec{u}_2, \vec{u}_5)$ ;  $r(\vec{u}_5, \vec{u}_6) = r(\vec{u}_{11}, \vec{u}_{12})$ ; etc.

As condições para que uma área seja homogênea e isotrópica são mais apropriadas em áreas planas do que em áreas montanhosas. Se uma área é homogênea e isotrópica com respeito a função de correlação, ela também o é com respeito a função de estrutura (Gandin, 1963).

Para seleção do modelo de correlação espacial, Rodrigues-Iturbe e Mejía (1974) fazem considerações sobre o fato de que os dados disponíveis não são suficientes para uma discriminação estatística entre as diferentes espécies de funções que podem representar a estrutura de correlação espacial sobre uma área. Dois problemas são por eles colocados:

- Que espécie de função deve ser usada para representar a correlação espacial; e
- Como estimar os parâmetros desta função uma vez que os dados quase sempre são observados irregularmente sobre a área.



Em resposta a primeira pergunta diversas funções têm sido propostas, podendo-se citar as seguintes:

Kagan (1966) apresentou uma função exponencial, aplicável segundo o autor para  $d$  entre 10 e 150Km, do tipo:

$$r(d) = r(0) e^{-\left(\frac{d}{d_0}\right)} \quad (\text{III.13})$$

onde os parâmetros  $r(0)$  e  $d_0$  são respectivamente a correlação para a distância zero, e a distância para qual a correlação é  $(r(0)/e)$ . Teoricamente  $r(0)$  deveria ser igual a um, mas na prática isto raramente acontece, devido aos erros cometidos na medida dos dados e as variações microclimáticas que atuam irregularmente sobre a área.

Karazev (1968) estudando a variação espacial de vazões de rios, propôs a seguinte função:

$$r(d) = 1 - \frac{d}{d_0} = 1 - ad \quad (\text{III.14})$$

onde  $d_0$  é a distância para a qual  $r(d_0) = 0$ . No caso de vazão,  $d$  é a distância entre os centros de gravidade da área de drenagem dos postos.

Alexeev (1971) utilizou a seguinte função:

$$r(d) = \frac{1}{1 + hd} \quad (\text{III.15})$$

onde  $h$  é o parâmetro a ser calculado a partir dos dados.

Rodríguez-Iturbe e Mejía (1974) usaram as seguintes funções:

$$r(d) = e^{-hd} \quad (\text{III.16})$$

e

$$r(d) = bd K_1(bd) \quad (\text{III.17})$$

onde  $K_1(.)$  é a função modificada de Bessel de primeira ordem de segunda espécie,  $h$  e  $b$  os parâmetros.

A estimativa dos parâmetros para as equações (III.13), (III.14), (III.15) e (III.16) pode ser feita através do método dos mínimos quadrados sobre as funções linearizadas.

O parâmetro  $b$  da equação (III.17) pode ser estimado através da equação (Rodríguez-Iturbe e Mejía, 1974):

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{k_f(i,j)}{\sum_{k=k_i(i,j)}^{k_f(i,j)} f_{i,k} \cdot f_{j,k}} = \quad (\text{III.18})$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ k_f(i,j) - k_i(i,j) + 1 \right] d_{i,j} b K_1(d_{i,j} b)$$

onde:  $k_i(i,j)$  e  $k_f(i,j)$  são respectivamente o início e o final do período em que os dados foram observados simultaneamente nos postos  $i$  e  $j$ , e  $f_{i,k}$  é a quantidade de precipitação padronizada durante  $k$  anos na estação  $i$ .

Em resposta a sua segunda pergunta, Rodríguez - Iturbe e Mejía (1974) discutem o fato de que se a área em estudo   pequena, a função de correlação com a distância deve ser ajustada de maneira a preservar os coeficientes de correlação para pequenas distâncias; o oposto deve ser observado para grandes áreas. Baseados nestas observações, os autores sugerem que a forma e as dimensões da área sejam caracterizadas pela distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso sobre a  rea. Esta distância é definida como sendo a "distância característica da correlação" ( $d_{cr}$ ), e será discutida mais adiante.

Exemplificando o conceito de distância característica de correlação, o s stema de equações:

$$r_{cr}(d_{cr}) = b d_{cr} K_1(b d_{cr}) \quad (III.19)$$

$$r_{cr}(d_{cr}) = e^{-hd_{cr}} \quad (III.20)$$

permite ajustar o parâmetro  $h$  da equação (III.16), a partir da equação (III.17), uma vez calculado o valor da correlação espacial para  $d_{cr}$  em (III.19). Procedimento análogo permite o ajuste do parâmetro  $b$  da equação (III.17), a partir da equação (III.16).

B) Distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso numa região plana e convexa

A função densidade de probabilidade de  $d$ , distância entre dois pontos escolhidos ao acaso em uma área retangular de lados  $a$  e  $b$ , ( $a \geq b$ ), e de diagonal  $R$  é dado por (Ghosh, 1951):

$$f(d) = \frac{4d}{a^2 b^2} \phi(d) \cdot \phi(R) \quad (\text{III.21})$$

onde:

$$\phi(d) = \frac{1}{2} \pi ab - ad - bd + \frac{1}{2} d^2, \text{ para } 0 \leq d < b \quad (\text{III.22})$$

$$\phi(d) = ab \cdot \text{sen}^{-1}(b/d) + a \sqrt{d^2 - b^2} - ad - \frac{1}{2} b^2, \text{ para}$$

$$b < d \leq a \quad (\text{III.23})$$

$$\phi(d) = ab \{ \text{sen}^{-1}(b/d) - \cos^{-1}(a/R) \} + a \sqrt{d^2 - b^2} +$$

$$+ b \sqrt{d^2 - a^2} - \frac{1}{2} (d^2 + a^2 + b^2), \text{ para}$$

$$a < d \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{III.24})$$

Para uma área quadrada,  $a = b$ , não existe a equação (III.23).

Reescrevendo a equação (III.21) em função da área A e dos lados a e b, tem-se:

$$f(d) = \frac{1}{A^{1/2}} \cdot f \left[ \frac{d}{A^{1/2}}, \left( \frac{a}{b} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III.25})$$

onde:

$$f(m,n) = 2m \left[ f_1(m,n) + f_2(mn,n) + f_2 \left( \frac{m}{n}, \frac{1}{n} \right) \right] \quad (\text{III.26})$$

com:

$$f_1(m,n) = \pi + m^2 - 2m \left( n + \frac{1}{n} \right)$$

$$\text{para } 0 < m < (n^2 + n^{-2})^{1/2}$$

$$f_1(m,n) = 0 \text{ nos demais casos}$$

$$f_2(m,n) = (2m^2 - 1)^{1/2} - 2 \cos^{-1}(1/m) - n^{-2} (m-1)^2$$

$$\text{para } 1 < m < (1 + n^4)^{1/2}$$

Para o caso de uma área quadrada de tamanho A, a equação (III.25) se resume a:

$$f(d) = \frac{2d}{A} \left( \pi + \frac{d^2}{A} - \frac{4d}{A^{1/2}} \right) \text{ para } 0 < \frac{d}{A^{1/2}} \leq 1 \quad (\text{III.27})$$

e

$$f(d) = \frac{2d}{A} \left[ \pi + \frac{d^2}{A} - \frac{4d}{A^{1/2}} + 4 \left( \frac{d^2}{A} - 1 \right)^{1/2} - 4 \cos^{-1} \left( \frac{A}{d} \right)^{1/2} \right. \\ \left. - 2 \left( \frac{d}{A^{1/2}} - 1 \right)^2 \right] \text{ para } 1 < \frac{d}{A^{1/2}} \leq \sqrt{2} \quad (\text{III.28})$$

Matern (1960) usando a equação (III.21) calculou a distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso em uma área unitária para sete formas diferentes de áreas, apresentadas na tabela III.1.

Formato	$\bar{d}$
círculo	0,5108
hexágono	0,5126
quadrado	0,5214
triângulo equilátero	0,5544
retângulo $\alpha = 2$	0,5691
retângulo $\alpha = 4$	0,7137
retângulo $\alpha = 16$	1,3426

Tabela III.1 - Valor esperado da distância entre dois pontos ( $\alpha$ : relação entre os lados do retângulo).

Para calcular a distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso em uma região de área A, que tenha uma das formas geométricas indicadas na tabela III.1, basta multiplicar o valor indicado por um coeficiente de proporcionalidade entre distâncias homólogas nas regiões de área A e de área unitária.

Exemplificando: seja uma área quadrada com 10.000 Km<sup>2</sup>, a distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso nesta área é dado por:

$$d = \frac{\sqrt{10.000}}{\sqrt{1}} \times 0,5214 = 52,14 \text{ Km} \quad (\text{III.29})$$

onde  $\sqrt{10.000}$  é o lado da área considerada e  $\sqrt{1}$  é o lado da área unitária.

### C) Correlação espacial em áreas anisotrópicas

Caffey (1967) considerando os vários fatores meteorológicos que causam a precipitação sobre a área, conclue que as isolinhas dos coeficientes de correlação entre as estações podem ter uma forma elíptica. Neste caso a correlação passa a ser função da distância e da posição em relação à estação considerada, isto é:

$$r = f(d, \theta) \quad (\text{III.30})$$

onde d é a distância entre as estações, e  $\theta$  o ângulo formado pelas mesmas em relação a direção tomada como referência.

Dentre uma série de equações que traduzem a função acima, Caffey seleccionou a seguinte equação:

$$r = a_1 e^{-(a_2 d + a_3 d \cos 2 \theta + a_4 d \sin 2 \theta)} \quad (\text{III.31})$$

Esta função é linear em  $d$ , simétrica em relação aos dois eixos da elipse, e sempre positiva para qualquer valor de  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  se  $a_1 > 0$ . Os parâmetros desta equação podem ser obtidos ajustando os dados à equação, através de um processo de regressão múltipla.

O ângulo formado entre a direção de referência e o eixo maior da elipse,  $\theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}}$ , é dado por:

$$\theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{a_4}{a_3} \quad (\text{III.32})$$

A taxa de variação da correlação ao longo do eixo maior é dada por:

$$C_1 = a_2 + a_3 \cos 2 \theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} + a_4 \sin 2 \theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} \quad (\text{III.33})$$

e ao longo do eixo menor por:

$$C_2 = a_2 + a_3 \cos 2 \left( \theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} + \frac{\pi}{2} \right) + a_4 \sin 2 \left( \theta_{\text{m}\bar{\text{a}}\text{x}} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{III.34})$$



O grau de elipsidade  $R_C$ , é dado pela razão entre  $C_1$  e  $C_2$ .

$$R_C = \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{III.35})$$

Na prática, é muito comum deparar-se com áreas onde é anisotrópico o comportamento da correlação espacial. Entretanto, chama-se aqui a atenção que para simplificação de cálculos, os métodos discutidos neste trabalho consideram sempre que o processo sobre a área é homogêneo e isotrópico. Desta forma, é aconselhável que se verifique antes se a área em estudo atende as premissas dos métodos; sendo que  $R_C$  é um parâmetro que pode ser usado para verificar o quanto a área é anisotrópica, pois se  $R_C \cong 1$  a área pode ser considerada isotrópica.

### III.1.2 Correlação Temporal

O grau de associação entre os sucessivos valores de uma variável medida num mesmo ponto, é avaliado pelo coeficiente de correlação espacial, o qual pode ser estimado por:

$$r_K = \frac{\sum_{i=1}^{N-K} x_i x_{i+K} - \frac{1}{(N-K)} \left( \sum_{i=1}^{N-K} x_i \right) \left( \sum_{i=1}^{N-K} x_{i+K} \right)}{\left( \sum_{i=1}^{N-K} x_i^2 - \frac{1}{(N-K)^2} \left( \sum_{i=1}^{N-K} x_i \right)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^{N-K} x_{i+K}^2 - \frac{1}{(N-K)^2} \left( \sum_{i=1}^{N-K} x_{i+K} \right)^2 \right)^{1/2}} \quad (\text{III.36})$$

onde  $N$  é o número de eventos da série e  $K$  o defasamento de tempo entre eles.

A estrutura de correlação temporal para séries anuais, mensais ou semanais de altura de precipitação é bastante fraca, podendo ser aproximada por um modelo autoregressivo de primeira ordem (Rodríguez-Iturbe e Mejía, 1974):

$$r_K = \rho^K \quad (\text{III.37})$$

onde  $\rho$  é o primeiro coeficiente de autocorrelação da série.

Rodríguez-Iturbe e Mejía (1974), utilizam uma troca de informações entre o tempo e o espaço para estimar o parâmetro  $\rho$  representativo no tempo para toda área, que é dado por:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=k_i'(i,j)}^{k_f'(i,i)} f_{i,k} f_{i,k+1} \quad (\text{III.38})$$

$$= \rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [k_f'(i,j) - k_i'(i,j) + 1] d_{i,j} b K_1(d_{i,j} b)$$

onde os termos são os mesmos da equação (III.18) onde é estimado o valor de  $b$ .

A correlação temporal em séries de altura de precipitação anual foi estudado por Yevjevich (1964) para diversos postos nos Estados Unidos, tendo concluído que estas séries podem ser consideradas independentes. A mesma conclusão chegaram Rodríguez-Iturbe e Mejía (1974) ao aplicar a equação (III.38) em uma região da Venezuela.

## III.2 ERRO DE ESTIMATIVA E PLANEJAMENTO DA REDE

### III.2.1 Método Prático

Uma primeira estimativa do número de estações que deve ter o sistema de coleta de dados de uma rede, pode ser obtida comparando a área em estudo com outra de características semelhantes que possua uma rede otimizada. Este enfoque pode ser muito útil especialmente quando se projeta uma rede numa área onde ainda não existem estações em operação. Porém, esta comparação se torna difícil uma vez que o número de redes otimizadas em operação é muito pequeno.

De outro lado, com base em experiências acumuladas ao longo dos anos, algumas organizações recomendam uma densidade mínima de estações que varia com as características físicas e climáticas da área em questão.

A densidade da população é um outro fator que também tem sido considerado nestas recomendações, pois é praticamente impossível instalar e operar, de maneira sistemática, um bom número de estações convencionais quando a população da região é muito pequena ou bastante esparsa, visto que é difícil encontrar operadores para locais onde muitas vezes o acesso do homem é quase impossível. Geralmente, estes locais coincidem com condições extremas de clima: regiões áridas, regiões polares e florestas equatoriais.

Como exemplo pode-se citar a Organização Meteorológica Mundial (OMM, 1975) que recomenda densidades mínimas, para um sistema de coleta de dados de precipitação, apresentadas na tabela III.2.

TIPO DE REGIÃO	DENSIDADE MÍNIMA (Km <sup>2</sup> /estação)	
	REGIÕES COM FACILIDADES	REGIÕES DE DIFÍCIL ACESSO
I. Regiões planas em zonas temperadas, mediterrâneas e tropicais	600-900	900-3000
II. Regiões montanhosas em zonas temperadas, mediterrâneas e tropicais	100-250	250-1000
Pequenas ilhas montanhosas com precipitação bastante irregular	25	
III. Zonas áridas e polares	1500-10.000	

Tabela III.2 - Densidade mínima de estações pluviométricas (OMM, 1975).

Apesar desta tabela constar de um guia hidrológico, não é feita nenhuma referência se uma rede com a densidade recomendada está voltada apenas para a estimativa da precipitação média sobre a área, ou se ela tem objetivos mais amplos.

### III.2.2 Método da Variância Relativa do Erro

Este método, proposto por Kagan (1972), usa o conceito do erro relativo para analisar a densidade de um sistema de coleta de dados.

A variância do erro cometido ao se tomar a altura de precipitação medida em um ponto como sendo a altura média da precipitação em uma área  $\underline{s}$  ao seu redor é dada por:

$$E_1 = \sigma_h^2 \left[ 1 - r(0) \right] + \sigma_h^2 \left[ 0,23 \times \frac{\sqrt{s}}{d_0} \right] \quad (\text{III.39})$$

desde que a função da correlação com a distância possa ser expressa pela equação (III.13); sendo que  $\sigma_h^2$  é a variância da altura de precipitação no ponto (Kagan, 1972).

A primeira parcela da equação (III.39) é atribuída aos erros aleatórios, introduzidos nos dados pelos erros de observação e pelas variações microclimáticas da região. A segunda parcela é atribuída à variação espacial da precipitação sobre a área.

Para uma área  $\underline{S}$  com  $\underline{N}$  estações uniformemente distribuídas, tal que  $S=Ns$ , a variância do erro no cálculo da precipitação média sobre a área  $S$  é:

$$E_N = \frac{\sigma_h^2}{N} \left[ 1 - r(0) + \frac{0,23}{d_0} \cdot \sqrt{\frac{S}{N}} \right] \quad (\text{III.40})$$

A variância do erro  $\bar{e}$  melhor avaliada em termos de valor relativo do que absoluto, pois se em uma área a precipitação média for de 1.500 mm e em outra de 800 mm, um erro de 100mm na primeira área é menos significativa do que na segunda. Devido a isto a variância do erro é melhor avaliada usando o coeficiente de variação, resultando em:

$$Z_N = \frac{\sqrt{E_N}}{\bar{h}} = C_v \sqrt{\frac{1 - r(0) + \frac{0,23}{d_0} \sqrt{\frac{S}{N}}}{N}} \quad (\text{III.41})$$

onde  $C_v = \sigma_h / \bar{h}$ .

A equação acima é a base do método de Kagan, que usa o erro relativo, para o planejamento de rede pluviométrica. Conhecidos os valores de  $C_v$ ,  $r(0)$  e  $d_0$  para a área  $S$  em estudo pode-se determinar o valor de  $Z_N$  para diversos  $N$ , ou então dado um valor de  $Z_N$  máximo admissível (que Kagan recomenda ser menor que 10%) pode-se calcular  $N$ .

A distância máxima entre as estações depende da configuração da rede pluviométrica. Se as estações forem instaladas nos pontos de intersecção de um quadrado, a distância entre as estações deve ser:

$$d = \sqrt{\frac{S}{N}} \quad (\text{III.42})$$

Na prática as áreas em estudo quase sempre têm um formato complexo, o que torna mais conveniente o uso de uma configuração triangular, e neste caso a distância máxima entre as estações é:

$$d = \sqrt{\frac{2S}{N\sqrt{3}}} = 1,07 \sqrt{\frac{S}{N}} \quad (\text{III.43})$$

### III.2.3 Método dos Fatores de Redução da Variância

Neste método, apresentado por Rodrigues-Iturbe e Mejía (1974), a eficiência de uma rede é analisada com base na variância da média regional de um processo estacionário. Esta variância é expressa em função da variância pontual do processo ( $\sigma_p^2$ ) multiplicada por dois fatores: um devido a amostragem no tempo (função da correlação temporal) e o outro devido a amostragem no espaço (função da correlação espacial).

#### A) Formulação do problema

Sendo  $f(u_i, t)$  a diferença entre a altura de precipitação acumulada num ponto de coordenadas  $u_i$ , durante o período de tempo  $t$  (que pode ser anual, mensal ou sazonal), e a média de todo o processo neste ponto;  $N$  o número de estações da rede;  $T$  o número de períodos  $t$  no qual ela foi operada; e  $A$  a área em consideração, a rede pode ser dimensionada a partir da média regional:

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{AT'} \sum_{t=1}^{T'} \int_A f(u_i, t) du_i \quad (\text{III.44})$$

que  $\bar{e}$  é estimada por:

$$\bar{p} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T f(u_i, t) \quad (\text{III.45})$$

A precisão com que a média regional  $\bar{e}$  é estimada pela equação (III.45) é dada por:

$$E \left[ \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T f(u_i, t) - \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{AT'} \sum_{t=1}^{T'} \int_A f(u_i, t) du_i \right]^2 \quad (\text{III.46})$$

#### B) Solução apresentada

Conforme será demonstrado a seguir, desde que o processo possa ser considerado estacionário e a sua covariância expressa pela equação (III.11), a variância dada pela equação (III.46) depende apenas da variância de  $\bar{p}$ ; em outras palavras, isto quer dizer que a precisão com que a precipitação média sobre a área  $\bar{e}$  coletada pela rede pode ser expressa em função da variância de  $\bar{p}$ .

Para isto, será demonstrado inicialmente que o valor médio dado pela equação (III.44) tem variância zero sendo por-



$$E \left[ \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{AT'} \sum_{t=1}^{T'} \int_A f(u_i, t) du_i \right]^2 =$$

$$E \left[ \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{A^2 T'^2} \sum_{t=1}^{T'} \sum_{t'=1}^{T'} \int_A \int_A f(u_i, t) \cdot f(u_{i'}, t') du_i du_{i'} \right]$$

(III.47)

Substituindo (III.11) em (III.47) e lembrando que a função de correlação temporal pode ser expressa por um modelo autoregressivo de primeira ordem (parágrafo III.1.2), a equação anterior se torna igual a:

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{A^2 T'^2} \sigma_p^2 \sum_{t=1}^{T'} \sum_{t'=1}^{T'} \int_A \int_A r(u_i - u_{i'}) \rho^{|t'-t|} du_i du_{i'}$$

(III.48)

Na equação acima temos que:

$$\sum_{t=1}^{T'} \sum_{t'=1}^{T'} \rho^{|t-t'|} = \sum_{t=1}^{T'} \rho^{|0|} + 2 \sum_{t=1}^{T'-1} \sum_{t'=t+1}^{T'} \rho^{|t'-t|} \quad (\text{III.49})$$

onde

$$\sum_{t=1}^{T'} \rho^{|0|} = T' \quad (\text{III.50})$$

e

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^{T'-1} \sum_{t'=t+1}^{T'} \rho^{|t'-t|} &= \sum_{t=1}^{T'-1} (\rho + \rho^2 + \dots + \rho^{T'-1}) = \\
 &= \sum_{t=1}^{T'-1} \rho(1 + \rho + \dots + \rho^{T'-t-1}) \quad (\text{III.51})
 \end{aligned}$$

multiplicando e dividindo esta equação por  $(1-\rho)$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^{T'-1} \rho(1 + \rho + \dots + \rho^{T'-t-1}) \frac{(1-\rho)}{(1-\rho)} &= \\
 &= \sum_{t=1}^{T'-1} \frac{\rho(1 - \rho + \rho - \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{T-t-1} + \rho^{T'-t})}{(1-\rho)} \\
 &= \sum_{t=1}^{T'-1} \frac{\rho(1 - \rho^{T'-t})}{(1-\rho)} = \\
 &= \frac{\rho}{1-\rho} \left[ (T'-1) - \frac{\rho}{1-\rho} (1 - \rho^{T'-1}) \right] \quad (\text{III.52})
 \end{aligned}$$

substituindo (III.50) e (III.52) em (III.48) conclui-se que o limite da equação (III.48) quando  $T' \rightarrow \infty$  é zero, ou seja:

$$\lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{A^2 T'^2} \sigma_p^2$$

$$\cdot \left\{ T' + 2 \frac{\rho}{1 - \rho} \left[ (T' - 1) - \frac{\rho}{1 - \rho} (1 - \rho^{T' - 1}) \right] \right\} \quad (\text{III.53})$$

$$\cdot \int_A \int_A r(u_i - u_j) du_i du_j = 0$$

Generalizando tem-se as equações (III.3) e (III.4),

$$E \left[ f(u_i, t) \right] = 0 \quad \text{e} \quad E \left[ f^2(u_i, t) \right] = \sigma_p^2 .$$

Desta forma, a equação (III.46) se resume na variância de  $\bar{P}$ , que é dada por:

$$\text{Var} [\bar{P}] = \frac{1}{N^2 T^2} E \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N f(u_i, t) \right]^2 \quad (\text{III.54})$$

A variância da média regional é avaliada como uma função da estrutura de correlação do processo no tempo e no espaço, do número de estações da rede, da geometria de amostragem da rede e do período de operação das estações, através de:

$$\text{Var } [\bar{P}] = \frac{1}{N^2 T^2} E \left[ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N f(u_{i,t}) f(u_{i',t}) + 2 \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{t'=t+1}^T \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N f(u_{i,t}) f(u_{i',t'}) \right] \quad (\text{III.55})$$

que é igual a:

$$\text{Var } [\bar{P}] = \frac{1}{N^2 T^2} \sigma_p^2 \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N r(u_i - u_{i'}) \right] \left[ \sum_{t=1}^T 1 + 2 \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{t'=t+1}^T \rho^{t'-t} \right] \right\} \quad (\text{III.56})$$

Substituindo os termos do lado direito da equação (III.56)

por:

$$F_1(T) = \frac{1}{T^2} \left[ \sum_{t=1}^T 1 + 2 \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{t'=t+1}^T \rho^{t'-t} \right] \quad (\text{III.57})$$

e

$$F_2(N) = \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N r(u_i - u_{i'}) \right] \quad (\text{III.58})$$

tem-se que:

$$\text{Var } [\bar{P}] = \sigma_p^2 \cdot F_1(T) \cdot F_2(N) \quad (\text{III.59})$$

onde a variância da média regional  $\bar{P}$  é expressa como uma função da variância pontual do processo multiplicada por dois fatores de redução, um devido a amostragem no tempo e outro devido a amostragem no espaço.

O fator de redução devido a amostragem no tempo,  $F_1(T)$ , pode ser expresso em função da correlação temporal e do número de anos em que a rede foi operada, através da equação:

$$F_1(T) = \left\{ T + 2 \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left[ T - 1 - \frac{\rho}{\rho-1} (1 - \rho^{T-1}) \right] \right\} \cdot T^{-2} \quad (\text{III.60})$$

que é obtida aplicando-se o mesmo desenvolvimento matemático da equação (III.51) na equação (III.57). Na figura (III.2) é apresentada graficamente a solução da equação (III.60) para diversos valores de  $\rho$  e  $T$ .

O fator de redução devido a amostragem espacial,  $F_2(N)$ , depende da estrutura de correlação espacial, da geometria de amostragem e do número de estações. A geometria de amostragem pode ser de três tipos: aleatório simples, aleatório estratificado ou sistemático. Neste trabalho será usado o primeiro tipo, onde cada estação é localizada, com uma distribuição de probabilidade uniforme sobre a área  $A$ , independente das outras estações. Neste caso a equação (III.58) se transforma em:

$$F_2(N) = \frac{1}{N^2} E \left[ \sum_{i=1}^N r(0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N r(u_i - u_j) \right] \quad (\text{III.61})$$

Como o segundo termo desta equação é uma variável aleatória, ao se trabalhar com seu valor esperado, a equação (III.61) resulta em:

$$F_2(N) = \frac{1}{N^2} \{ N + N(N-1) E \left[ r(u_i - u_j) | A \right] \} \quad (\text{III.62})$$

onde  $E \left[ r(u_i - u_j) | A \right]$  é o valor esperado da correlação espacial entre dois pontos localizados aleatoriamente numa área de tamanho  $A$ . Ele depende da forma da área e do tipo de função,  $r(d)$ , que caracteriza a correlação espacial do processo. Em áreas isotrópicas tem-se:

$$E \left[ r(u_i - u_j) | A \right] = \int_0^R r(d) f(d) dd \quad (\text{III.63})$$

onde  $f(d)$  é a distribuição da frequência da distância  $d$  entre dois pontos escolhidos ao acaso na área  $A$  (a qual é função da forma da área), e  $R$  é a maior distância possível em  $A$ .

Numa área de tamanho  $A$  onde o parâmetro  $h$  da função de correlação espacial (III.16) é igual a um, o valor esperado da correlação entre dois pontos escolhidos aleatoriamente é o

mesmo que o de uma área homóloga de tamanho  $A/h^2$  na qual atua um processo com o parâmetro de correlação  $h$  (Rodríguez-Iturbe e Mejía, 1974). Em outras palavras isto quer dizer que em áreas homólogas mantendo-se constante o produto  $Ah^2$  obter-se-á o mesmo valor para  $E \left[ r(u_i - u_j) | A \right]$ .

Conforme já foi dito anteriormente  $f(d)$  depende da forma geométrica da área em estudo. Entretanto, a distância média entre dois pontos escolhidos ao acaso nas diferentes formas de área que normalmente ocorrem na natureza pouco se diferem entre si, o que pode ser constatado na tabela (III.1) que apresenta esta distância para áreas unitárias com diversas formas geométricas.

Desta forma, resolvendo-se a equação (III.63) para uma área quadrada tem-se um cálculo aproximado, com precisão suficiente, para as outras formas de área mais comuns na natureza. Para uma área quadrada cuja diagonal é 1, a equação (III.63) resulta em:

$$\int_0^1 r(d) \frac{2d}{A} \left\{ \pi + \frac{d^2}{A} - \frac{4d}{A^{1/2}} \right\} dd + \int_1^{\sqrt{2A}} r(d) \frac{2d}{A} \left[ \pi + \frac{d^2}{A} - \frac{4d}{A^{1/2}} + \right. \\ \left. + 4 \left( \frac{d^2}{A} - 1 \right)^{1/2} - 4 \cos^{-1} \left( \frac{A^{1/2}}{d} \right) - 2 \left( \frac{d}{A^{1/2}} - 1 \right)^2 \right] dd$$

As figuras (III.3) e (III.4) apresentam a solução de  $F_2(N)$  para diversos valores de  $Ah^2$  e  $N$  para as funções de correlação espacial dadas, respectivamente, pelas equações (III.17) e (III.16).

O produto  $(F_1(T) \cdot F_2(N))$  representa a redução total, em variância relativa, da variância da precipitação pontual quando se estima a precipitação média acumulada em um longo período de tempo numa área com  $N$  estações operadas por  $T$  anos.

Esse produto, pode então ser usado para analisar a eficiência da rede para diversas configurações no tempo e no espaço, permitindo desta forma o planejamento de uma política para a operação da rede.



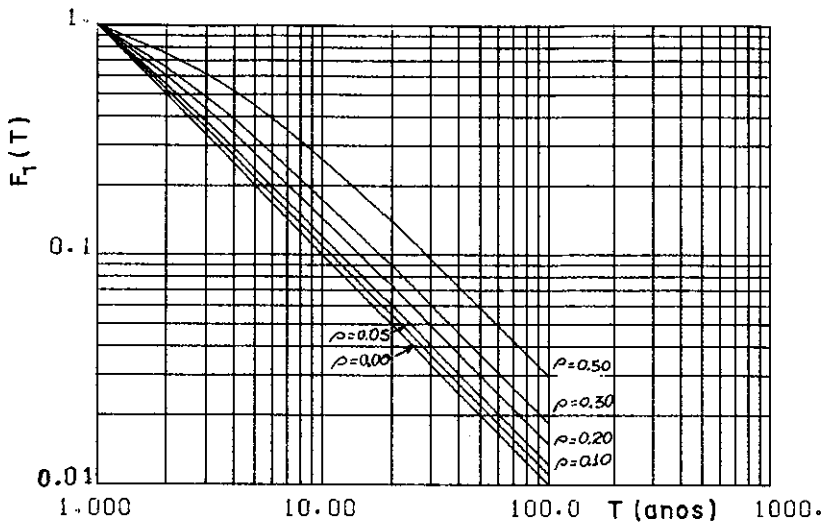


Figura III.2 - Fator de redução da variância devido a amostragem no tempo

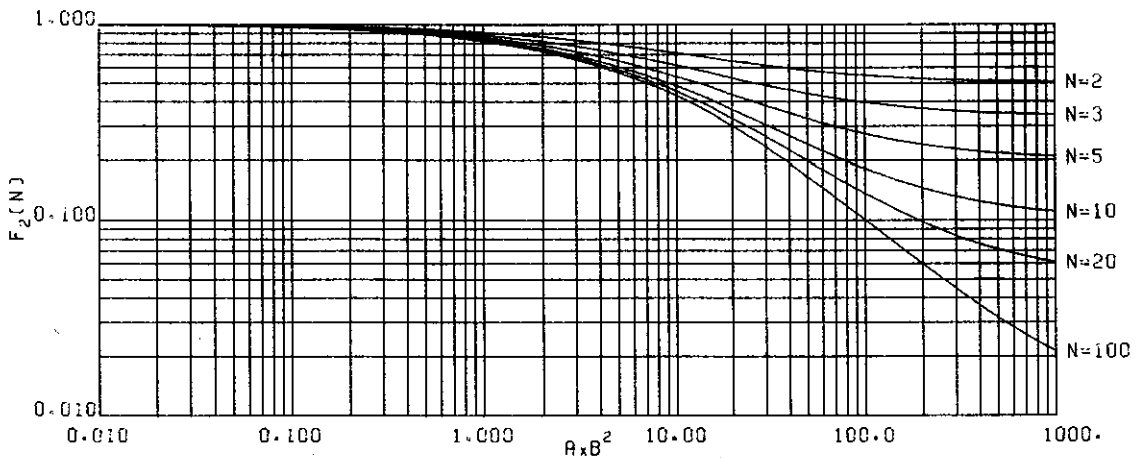


Figura III.3 - Fator de redução da variância devido a amostragem espacial (função de correlação - BESSEL)

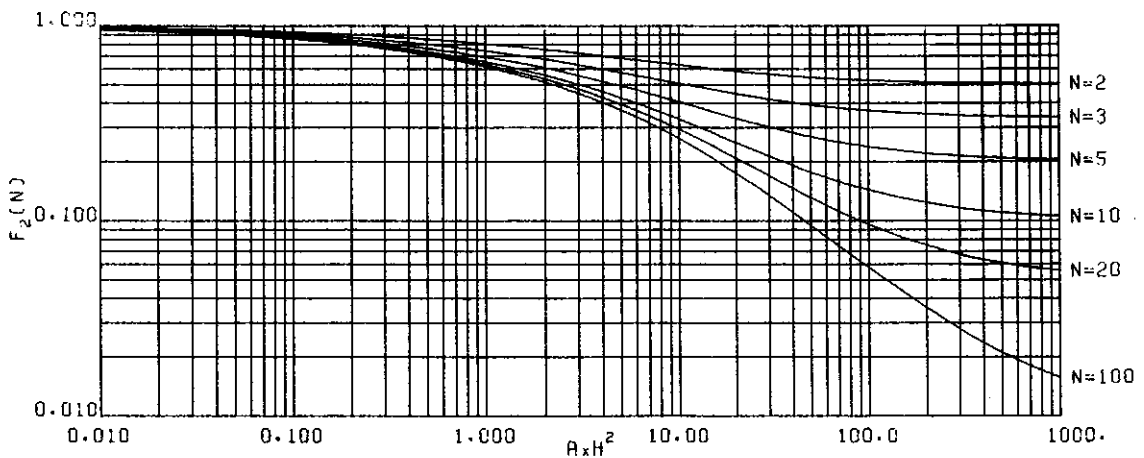


Figura III.4 - Fator de redução da variância devido a amostragem espacial (função de correlação-EXPONENCIAL)

### III.2.4 Método com Base na Integração da Superfície de Precipitação

Se for verificado que o sistema de coleta de dados da rede tem densidade além da desejada, o número de postos a serem desativados pode ser determinado através deste método proposto por Shaw e O'Connell (1976). Ele pode ser dividido em três etapas:

- 1) Inicialmente estima-se a precipitação média sobre a área, por qualquer um dos diversos métodos disponíveis, utilizando-se dos  $N$  postos em operação.
- 2) Em seguida com um número menor de postos,  $N'$ , selecionados aleatoriamente ou a priori desde que se tenha um conhecimento físico-climático da região, estima-se novamente a precipitação média acumulada sobre a área, avaliando-se a seguir o erro cometido comparando o valor obtido neste caso com o obtido em (1). Se a seleção dos postos for aleatória, a comparação pode ser feita com base na média de  $n$  amostras, sendo que em geral  $n$  deve ser igual a 15.
- 3) O procedimento em (2) é repetido até que seja obtido um erro relativo aceitável, isto é, um erro menor que o erro máximo admitido para a rede analisada.

É prática comum em hidrologia estimar a altura média de precipitação sobre uma área por um dos três métodos clássicos: média aritmética, polígonos de Thiessen ou isoietas. As

vantagens e desvantagens de cada um encontram-se discutidas em praticamente todos livros textos de hidrologia.

Todavia, se imaginarmos a altura de precipitação acumulada sobre uma área  $S$  como sendo uma hipersuperfície formada pela altura de precipitação em cada ponto da área, a altura média de precipitação sobre a área será a razão entre o volume obtido pela integração da hipersuperfície e a área em questão, ou seja:

$$\bar{h} = \frac{\int_S h(.) \, dx \, dy}{\int_S dx \, dy} \quad (\text{III.65})$$

onde  $h(.)$  vem a ser a hipersuperfície imaginária, aqui chamada de superfície de precipitação.

Diversos modelos matemáticos têm sido utilizados para representar a superfície de precipitação, sendo que numa primeira análise eles podem ser divididos em dois grupos. Os primeiros procuram correlacionar a altura de precipitação com uma série de características fisiográficas que influenciam na sua variação sobre a área. Os do segundo grupo se preocupam em ajustar a superfície de precipitação através de uma interpolação dos dados coletados nos pontos de medição.

Os modelos do primeiro grupo se baseiam no fato de que os eventos causadores do clima em regiões fisiograficamente homogêneas propiciam a mesma resposta em pontos idênticos. A interação existente entre a altura de precipitação e as características fisiográficas de um ponto, pode ser expressada matematicamente pela seguinte equação:

$$h = a_0 + a_1 B_1^{b_1} + a_2 B_2^{b_2} + \dots + a_n B_n^{b_n} \quad (\text{III.66})$$

onde  $h$  é a altura de precipitação;  $B_1, B_2, \dots, B_n$  as características fisiográficas do ponto;  $b_1, b_2, \dots, b_n$  expoente quase sempre igual a 1 ou 2, e  $a_0, a_1, \dots, a_n$  os coeficientes do modelo que são obtidos através de uma análise de correlação linear múltipla.

Solomon (1972), identificou uma série de características fisiográficas que podem influenciar o clima de uma região, as quais de uma maneira geral podem ser classificados em:

a) Características de localização:

- latitude
- longitude
- distância até o oceano nas diversas direções  
(N, S, E, W, NE, NW, ....)

b) Características topográficas

- altitude
- área de florestas
- área de lagos, pântanos
- ocupação do solo

c) Características orográficas

- . efeito de barreira nas diversas direções, definido como sendo a diferença entre a altitude do ponto e a maior altitude numa direção considerada, até o oceano
- . efeito de escudo, definido como a soma das diferenças de altitude de todos os trechos ascendentes encontrados numa dada direção, até o oceano.

Devido as dificuldades em se detalhar as características fisiográficas de uma região, o que geralmente implica a necessidade de consultas a mapas com escalas de denominador reduzido ou mesmo o sobrevôo da região, alguns autores tem sugerido alguns modelos que fazem uso apenas das coordenadas geográficas de cada ponto da área, sendo dois destes modelos apresentados a seguir.

Superfície linear - Este modelo assume que a superfície de precipitação é um plano (Clarke e Edwards, 1972). O modelo é dado por:

$$h = b_1 + b_2 x + b_3 y + \epsilon_1$$

(III.67)

onde  $(x, y)$  são as coordenadas geográficas do ponto. Este modelo se ajusta melhor em áreas planas e pequenas.

Superfície polinomial - Este tipo de modelo tem sido aplicado, com bons resultados, para a temperatura e a pressão atmosférica em diferentes níveis da atmosfera.

O modelo de grau  $n$  tem a seguinte equação:

$$h = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + \dots + b_k x^n + b_{k+1} y^n + \\ + b_{k+2} x^{n-1} y + \dots \quad (\text{III.68})$$

onde os coeficientes  $b_i$  podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados.

A seleção da superfície polinomial que melhor se ajusta aos dados da região pode ser feita:

a) estimando a eficiência do modelo através da raiz quadrada dos desvios médios:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (hc_i - ho_i)^2}{n - m - 1}} \quad (\text{III.69})$$

onde:

$ho_i$  - precipitação observada no posto  $i$ ;

$hc_i$  - precipitação calculada no posto  $i$ ;

$n$  - número de postos; e

$m$  - número de parâmetros do modelo.

Ao aumentar o grau do modelo estima-se a eficiência do ajustamento, sendo a seleção feita comparando-se a eficiência dos modelos ajustados.

b) usando "stepwise multiple regression", através de um teste para selecionar as variáveis do modelo e um outro teste para definir o tipo de modelo.

Dentre os modelos do segundo grupo, Dean e Snyder (1977) utilizam um método de interpolação, onde a altura de precipitação em um ponto sem medição é dada por uma média ponderada entre os valores medidos nas estações vizinhas ao ponto. O peso atribuído a cada estação é baseado no inverso da sua distância ao ponto para onde a informação está sendo transferida.

Um outro modelo de interpolação que tem sido usado, é o de superfície multiquadrática cônica circular reta (Shaw e Lynn, 1972). Neste modelo, a altura de precipitação em cada ponto da área, resulta do somatório dos cones circular reto ajustados às alturas de precipitação medidas nos postos. Matematicamente, a altura de precipitação em qualquer ponto da área é dada por um somatório de N parcelas, onde cada parcela é o produto do grau de achatamento do cone ajustado a uma estação, pela distância à esta estação do ponto questionado. Pelos bons resultados anteriormente obtidos (Shaw e Lynn, 1972), neste trabalho será discutido apenas este último modelo de interpolação.

Superfície multiquadrática - Esta técnica, usada inicialmente para representar matematicamente a topografia de uma área (Hardy, 1971), é também usada para representar uma superfície de precipitação (Shaw e Lynn, 1972).

Neste modelo, a superfície de precipitação é representada pelo somatório de diversas superfícies quadráticas passando por cada um dos pontos de medição, formando desta maneira uma superfície multiquadrática que pode ser representada pela série:

$$h = \sum_{i=1}^N C_i \left[ f(x_i, y_i, x, y) \right] \quad (\text{III.70})$$

onde  $h$  é a altura da superfície no ponto de coordenadas  $(x, y)$ ,  $N$  é o número de estações pluviométricas,  $f(.)$  é uma função quadrática e  $C_i$  é um coeficiente que mede o grau de achatamento da superfície quadrática na estação  $i$ .

Para uma superfície multiquadrática cônica circular  $h$  parabólica a equação (III.70) se transforma em:

$$h = \sum_{i=1}^N C_i \left[ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + K \right]^{1/2} \quad (\text{III.71})$$

e para uma circular parabólica em

$$h = \sum_{i=1}^N C_i \left[ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + K \right] \quad (\text{III.72})$$



A equação da superfície multiquadrática cônica circular circular reta é um caso particular da equação (III.71) com  $K=0$ , isto é:

$$h = \sum_{i=1}^N C_i \left[ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.73})$$

para esta superfície tem-se centrado em cada ponto  $i$  do plano  $xy$  o vértice de um cone circular reto em que a inclinação de suas geratrizes em relação ao plano  $xy$  é dada pelo arco-tangente de  $C_i$ . A figura (III.5) mostra uma superfície cônica circular reta passando pelo ponto  $i$ , e a sua contribuição no ponto  $j$ .

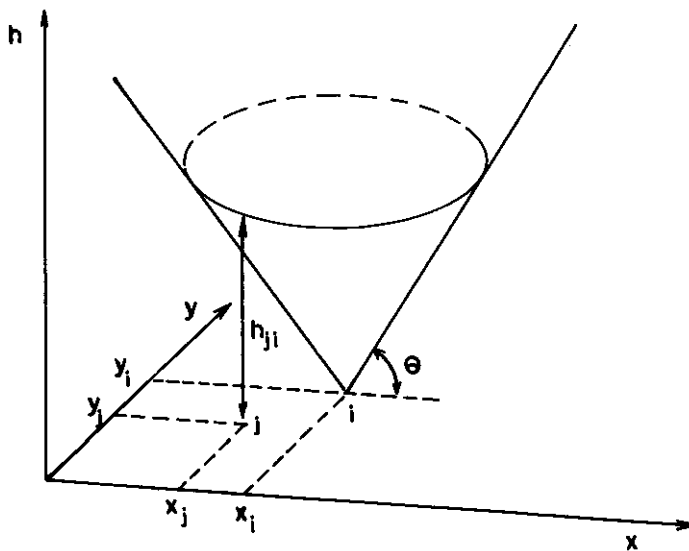


Figura (III.5) - Cone circular reto associado ao ponto  $i$ .

Escrevendo a equação (III.73) para cada um dos N pontos de medição, tem-se um sistema de N equações de onde é possível determinar os valores de  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots, N$ . Desta forma:

$$h_j = \sum_{i=1}^N C_i \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.74})$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

que pode ser escrita em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\underline{h} = \underline{A} \cdot \underline{C} \quad (\text{III.75})$$

cuja solução é

$$\underline{C} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{h} \quad (\text{III.76})$$

Substituindo os coeficientes  $C_i$ , determinados por (III.76), na equação (III.73) obtem-se a equação da superfície multiquadrática cônica circular reta para o fenômeno meteorológico.

gico em estudo, onde a superfície ajustada passa exatamente por todas as alturas de precipitação dadas e permite uma interpolação lógica da altura de precipitação nos pontos intermediários aos postos de medição.

#### IV. REDE PARA ESTIMAR A ALTURA MÉDIA DE PRECIPITAÇÃO SOBRE UMA ÁREA, QUANDO DA OCORRÊNCIA DE UMA TEMPESTADE ISOLADA

##### IV.1 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DE UMA TEMPESTADE

A representação matemática e o conhecimento do comportamento sobre uma região da superfície de altura de precipitação devido a uma tempestade, são elementos fundamentais para o estudo e a otimização das redes com o objetivo ora estudado. Desta forma serão apresentadas aqui as principais características de uma tempestade, visando a sua modelagem matemática:

A) A diferença entre a altura de precipitação  $P_0$  no centro da tempestade e a altura média de precipitação  $P_A$  sobre a área (Eagleson, 1970):

1. aumenta quando diminui o volume total precipitado;
2. diminui quando aumenta o tempo de duração da tempestade;
3. é maior nas tempestades oriundas de formações convectivas e orográficas que nas frontais.

B) Para efeito de cálculo, o traçado de isoietas de uma chuva convectiva tem uma forma circular.

Na realidade, a rede de isoietas fechadas apresentam muitas vezes uma certa tendência de serem elípticas. Entretanto, Fogel e Duskstein (1969) estudando uma amostra de cerca de 200 tempestades de formação convectiva verificaram que, na média, os

eixos da elipse formada pela rede de isoietas mantêm entre si uma relação de uma a uma vez e meia. Todavia, quando o raio de um círculo é computado como sendo a média dos eixos da elipse, a diferença entre as áreas dadas pelo círculo e pela elipse é menor que 10%.

C) O centro de uma tempestade, de formação convectiva ou orográfica, move-se muito pouco durante a sua existência.

Ackerman (1969) utilizando-se de uma série de observações realizadas com o auxílio de um radar meteorológico pode constatar o pouco movimento das tempestades, o que é uma das razões de serem aproximadamente circulares o traçado das isoietas deste tipo de precipitação.

As considerações A,B e C permitem expressar a distribuição espacial da altura de chuva devido a uma tempestade isolada, através de modelos matemáticos chamados de área-altura que é, para uma dada duração, a relação entre a altura de precipitação ocorrida e a área atingida.

Ao longo dos anos, diversos modelos de área-altura de precipitação têm sido propostos, todos eles obtidos empiricamente, e na sua maioria procuram expressar o decaimento da altura precipitada com a área, a partir do centro da chuva. Os modelos existentes propõem decaimentos do tipo: exponencial negativo, logarítmico ou com uma potência da área atingida. Serão apresentados aqui alguns destes modelos, onde a seguinte notação será usada:

$P_0$  - altura máxima de precipitação, que ocorre sempre no centro da área atingida pela chuva;

$P(d)$  - altura de precipitação a uma distância  $d$  do centro da área de chuva;

$P_A$  - precipitação média sobre a área fechada  $A$ , que é delimitada pela precipitação  $P(d)$ ;

$a, b$  - parâmetros dos modelos.

Horton (1924) estabeleceu a seguinte expressão de uso genérico

$$P_A = P_0 \exp (- a A^b) \quad (IV.1)$$

Boyer (1957), para o caso de precipitações oriundas de sistemas frontais sugere:

$$P(d) = P_0 \exp (- bd) \quad (IV.2)$$

Woolhiser e Szchwalen (1959) para precipitações convectivas:

$$A = b (P_0 - P(d))^a \quad (IV.3)$$

Fogel e Duckstein (1969) para precipitações convectivas:

$$P(d) = P_0 \exp (-b A) \quad (IV.4)$$

D) A localização do centro de uma tempestade de formação convectiva em uma área é aleatória.

Para chegar a esta conclusão, Osborn e Reynolds (1963) usaram o teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a hipótese nula de que o centro da tempestade pode ocorrer em qualquer ponto da área com igual probabilidade. Inicialmente eles dividiram a área, onde está localizada a rede, segundo o método de Thiessen para cálculo da precipitação média sobre a área; em seguida calcularam a distribuição do centro da tempestade observada em cada um dos polígonos de Thiessen, isto é, a razão entre o número de centros ocorridos dentro de cada polígono e o número total de tempestades analisadas. Assumindo uma distribuição uniforme para o centro das tempestades, o valor esperado em cada polígono é a razão entre sua área e a área total. A hipótese nula não foi rejeitada a um nível de significância de 10%.

E) A altura de precipitação proveniente de uma tempestade isolada é uma função aleatória no espaço (Brás e Rodrigues-Iturbe, 1976).

F) A distância característica da correlação espacial em uma tempestade, é a distância para qual o coeficiente de autocorrelação normalizado é igual a 0,5 (Eagleason, 1967). Esta distância é função da extensão da tempestade.

A função de autocorrelação normalizada é dada por:

$$\rho_p(x) = \frac{\rho_p(x)}{\rho_p(0)} \quad (IV.5)$$

onde

$$\phi_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(d) P(d+x) dd \quad (IV.6)$$

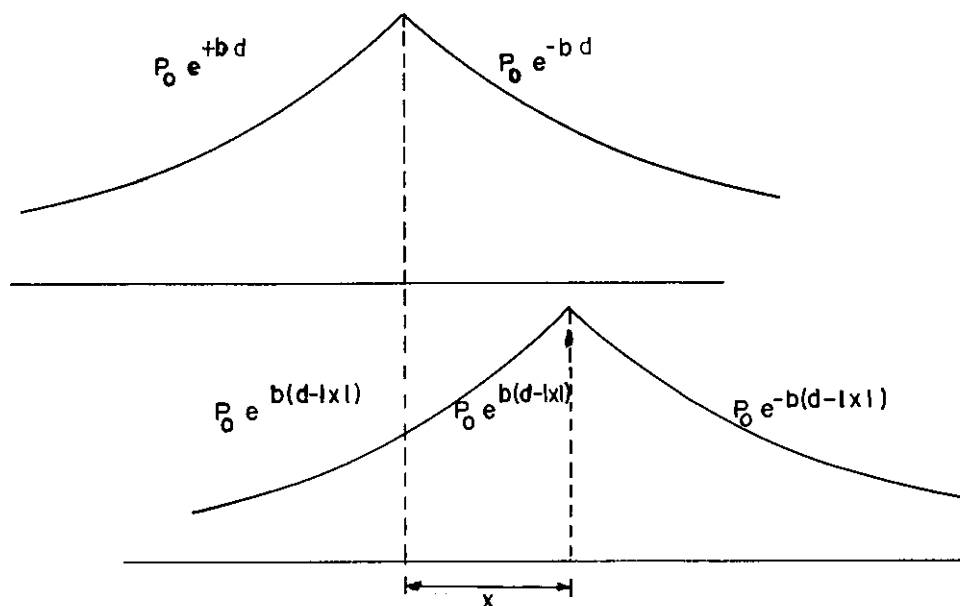
é a função de autocorrelação.

Então, por definição a distância  $d_0$ , característica da correlação espacial é dada por:

$$\phi_p(d_0) = 0,5 \quad (IV.7)$$

A função de autocorrelação normalizada para a equação (IV.2) é igual a:

$$\phi_p(|x|) = \frac{\phi_p(|x|)}{\phi_p(0)} =$$





$$= \frac{p_0^2 \left[ \int_{-\infty}^0 e^{bd} \cdot e^{b(d-|x|)} dd + \int_0^x e^{-bd} \cdot e^{-b(d-|x|)} dd \right]}{p_0^2 \left[ \int_{-\infty}^0 e^{bd} \cdot e^{bd} dd + \int_0^{\infty} e^{-bd} \cdot e^{-bd} dd \right]} =$$

$$= (1 + bx) \cdot \exp(-bx) \quad (\text{IV.8})$$

Neste caso, a distância característica da correlação para tempestades de formações frontais é dada por:

$$(1 + bd_0) \cdot \exp(-bd_0) = 0,5 \quad (\text{IV.9})$$

de onde se conclue que:

$$bd_0 = 1,68 \quad (\text{IV.10})$$

ou

$$d_0 = 1,68/b \quad (\text{IV.11})$$

Se na equação (IV.3), para chuvas convectivas, for admitido que a área entre as isoietas são circulares, ela se transforma em:

$$P(d) = P_0 - K d^c \quad (\text{IV.12})$$

desde que  $c$  seja próximo de 1, a seguinte aproximação é válida:

$$P(d) \cong P_0 - K d \quad (\text{IV.13})$$

A função de autocorrelação normalizada para a equação acima é:

$$\rho_p(|x|) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} K^2 x^2 + \frac{3}{4} K^3 x^3, & \frac{1}{K} \geq |x| \geq 0 \\ 2 - 3Kx + \frac{3}{2} K^2 x^2 - \frac{6}{25} K^3 x^3, & K \geq |x| \geq \frac{1}{K} \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

Resolvendo a equação acima para 0,5, pode ser determinado o valor de  $Kd_0$  e consequentemente  $d_0$ .

A função de correlação com a distância entre as alturas de precipitação em uma tempestade tem sido expresso por Rodrigues-Iturbe e Mejía (1974), através da função exponencial negativa e da função modificada de Bessel, dadas pelas equações (III.16) e (III.17). O ajuste dos parâmetros desta equação é feito a partir do conceito da distância característica da correlação em uma tempestade, ora discutido.

#### IV.2 ERRO DE ESTIMATIVA DA ALTURA MÉDIA SOBRE A ÁREA

A altura média de precipitação sobre uma área A, quando da ocorrência de uma tempestade, é dada por:

$$Z(A) = \int_A q(u) Z(u) du \quad (IV.15)$$

onde  $Z(u)$  e  $q(u)$  são respectivamente a altura de precipitação e a função peso no ponto de coordenadas  $u$ . Importante observar que  $Z(u)$  é uma variável aleatória de um processo onde os dois primeiros momentos são dados por:

$$E \{ Z(u) \} = m(u) \quad (IV.16)$$

$$E \{ Z(u) \cdot Z(u') \} = m(u) m(u') + \text{Cov}(u, u') \quad (IV.17)$$

onde  $\text{Cov}(u, u')$  é a função de covariância.

Se todos os pontos da área possuem o mesmo peso para a determinação da altura média de precipitação, isto é;

$$q(u) = 1/A \quad (IV.18)$$

a equação (IV.15) resulta em:

$$Z(A) = \frac{1}{A} \int_A Z(u) du \quad (IV.19)$$

Normalmente, o valor de  $Z(A)$  é estimado pela média ponderada:

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^N p_i \cdot Z(u_i) \quad (IV.20)$$

onde:

$N$  é o número de pontos amostrados sobre a área  $A$ , isto é, os postos de coletas da rede pluviométrica;

$p_i$  é o peso atribuído, por um dos diversos métodos existentes, ao posto de coordenadas  $u_i$ .

Admitindo o mesmo peso para todos os postos da rede, o valor de  $\bar{Z}$  é dado pela média aritmética:

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(u_i) \quad (\text{IV.21})$$

A eficiência de uma rede pluviométrica pode ser medida pela variância:

$$\sigma_N^2 = E \left\{ \left[ \bar{Z} - Z(A) \right]^2 \right\} \quad (\text{IV.22})$$

Lenton e Rodrigues-Iturbe (1977), têm usado este mesmo conceito de erro médio quadrático entre os valores: real e estimado, para medir a precisão da rede pluviométrica através da definição de uma nova variável hidrológica, por eles denominada de "variável regionalizada".

Seja  $Y(u)$  uma variável hidrológica, também aleatória, definida por:

$$Y(u) = Z(u) - m(u) \quad (\text{IV.23})$$

com

$$E \{ Y(u) \} = 0 \quad (IV.24)$$

e

$$E \{ Y'(u).Y(u') \} = Cov(u,u') \quad (IV.25)$$

importante observar que para a definição de (IV.23) o valor  $m(u)$  deve ser conhecido anteriormente.

Substituindo a equação (IV.23) na equação (IV.15), a altura média de precipitação sobre a área A pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} Z(A) &= \int_A q(u)(m(u)+Y(u)) du = \\ &= \int_A q(u) m(u) du + \int_A q(u) [Z(u)-m(u)] du \end{aligned} \quad (IV.26)$$

A precisão com que a rede pluviométrica está estimando  $Z(A)$  pode ser medida pela precisão com que se estima a última parcela da equação acima, ou seja:

$$\begin{aligned} z(A) &= \int_A q(u) Y(u) du = \\ &= \int_A q(u) [Z(u) - m(u)] du \end{aligned} \quad (IV.27)$$

que é conhecida como sendo a "variável regionalizada".

A estimativa de  $z(A)$ , pode ser obtida pela média ponderada de  $Y(u_i)$  observado em cada um dos postos pluviométricos da rede, ou seja:

$$\hat{z}(A) = \sum_{i=1}^N p_i Y(u_i) \quad (\text{IV.28})$$

onde  $p_i$  é o peso em cada posto.

O erro médio quadrático da estimativa da variável regionalizada  $z(A)$  é então:

$$\text{EMQ} = E \left\{ \left[ z(A) - \hat{z}(A) \right]^2 \right\} \quad (\text{IV.29})$$

que é utilizado para analisar a eficiência da rede.

Neste trabalho serão apresentadas duas metodologias para o cálculo da precisão da rede pluviométrica. Uma considera implicitamente a configuração da rede e mede a sua precisão pela equação (IV.22), na outra a configuração da rede é considerada explicitamente e se utiliza da equação (IV.29) para medir a precisão da rede.

A) Considerando implicitamente a configuração da rede

Neste método proposto por Rodrigues-Iturbe e Mejía(1974) o erro médio quadrático cometido na estimativa da altura média de precipitação, quando da ocorrência de uma tempestade isolada depende da variância pontual do processo  $\sigma_p^2$ , da sua correlação espacial  $r(u_i, u_{i'})$ , do número de estações da rede, além de considerar implicitamente a configuração da rede. Aqui será analisado apenas o caso em que a configuração da rede é tal que cada estação é localizada sobre a área total  $A$  com uma distribuição de probabilidade uniforme, independente das outras estações.

Expandindo-se a equação (IV.22) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 = & \left\{ \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(u_i) - \frac{1}{A} \int_A Z(u) du \right]^2 \right\} = \frac{\sigma_p^2}{N^2} \left[ \sum_{i=1}^N 1 + \right. \\ & + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{i'=i+1}^N r(u_i - u_{i'}) \left. \right] - \frac{2}{NA} \sigma_p^2 \cdot \sum_{i=1}^N \int_A r(u_i - u_{i'}) du_{i'} + \\ & + \frac{\sigma_p^2}{A^2} \int_A \int_A r(u_i - u_{i'}) du_i du_{i'} \end{aligned} \quad (IV.30)$$

No caso em que cada estação pluviométrica é localizada com uma distribuição de probabilidade uniforme, independente das demais estações, a equação (IV.30) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 &= \frac{\sigma_p^2}{N^2} \{ N + E \{ r(u_i - u_{j,i}) | A \} \cdot N \cdot (N-1) \} - \frac{2}{NA} \cdot \sigma_p^2 \cdot \frac{N}{A} \cdot \\
&\cdot \int_A \int_A r(u_i - u_{j,i}) \, du_i \, du_{j,i} + E \left[ r(u_i - u_{j,i}) | A \right] \sigma_p^2 = \\
&= \frac{\sigma_p^2}{N^2} \{ N + N(N-1) \cdot E \left[ r(u_i - u_{j,i}) | A \right] \} - 2\sigma_p^2 E \left[ r(u_i - \right. \\
&- u_{j,i}) | A \left. \right] + E \left[ r(u_i - u_{j,i}) | A \right] \sigma_p^2 = \frac{\sigma_p^2}{N} - \frac{\sigma_p^2}{N} \cdot E \left[ r(u_i - \right. \\
&- u_{j,i}) | A \left. \right] = \sigma_p^2 F_2(N) \quad (IV.31)
\end{aligned}$$

onde:

$$F_2(N) = (1 - E \left[ r(u_i - u_{j,i}) | A \right]) / N \quad (IV.32)$$

é o fator de redução da variância pontual  $\sigma_p^2$ .

O cálculo do valor esperado da correlação espacial entre dois pontos escolhidos aleatoriamente na área A,  $E \left[ r(u_i - u_{j,i}) | A \right]$ , é discutido no parágrafo III.2.3.

Para uma dada área A, o erro médio quadrático EMQ da estimativa pode ser escrita como uma função de N.



$$EMQ = E(N) = \sigma_p^2 (1 - a_A)/N \quad (IV.33)$$

onde

$$a_A = E \left[ r(u_i - u_{i'}, \lambda) | A \right] / N.$$

As figuras (IV.1) e (IV.2) mostram os valores de  $F_2(N)$ , considerando-se dois tipos de estrutura de correlação espacial para o processo (exponencial e função de Bessel).

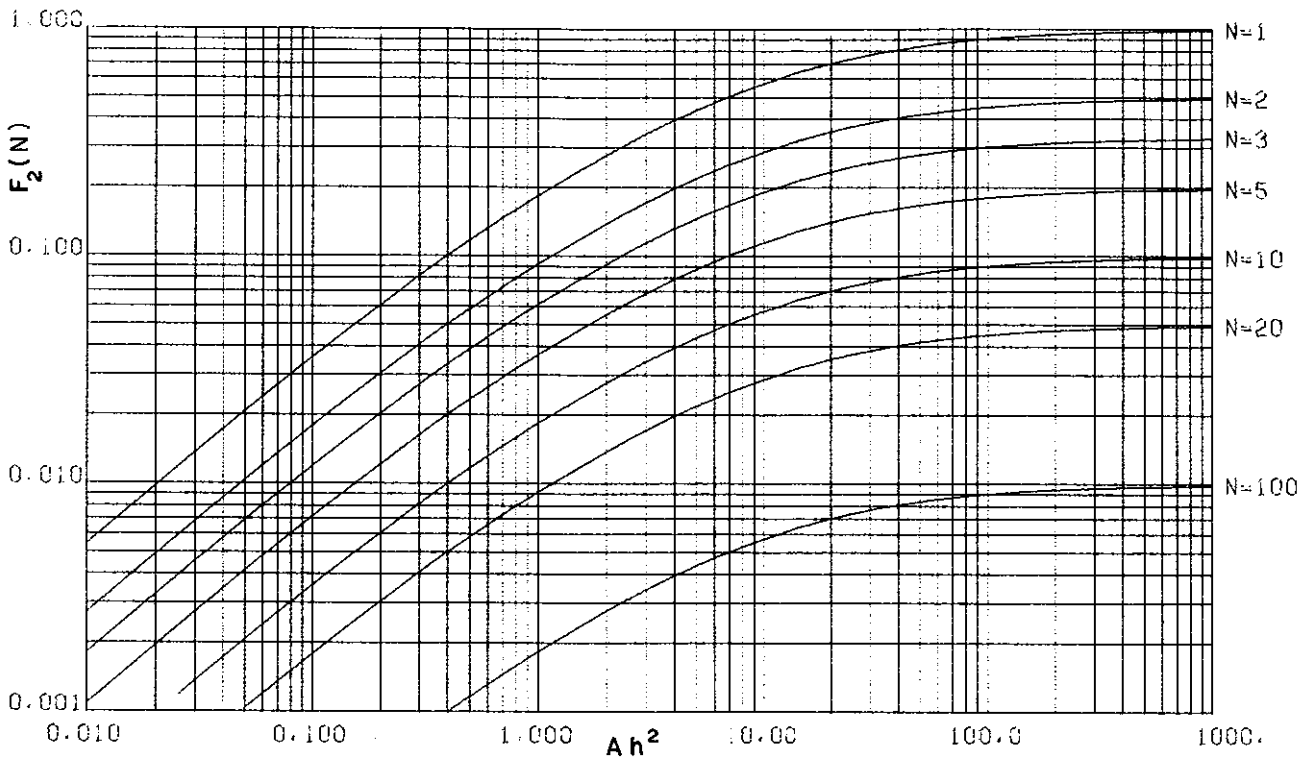


Figura IV.1 - Valores de  $F_2(N)$  considerando a função de correlação - EXPONENCIAL

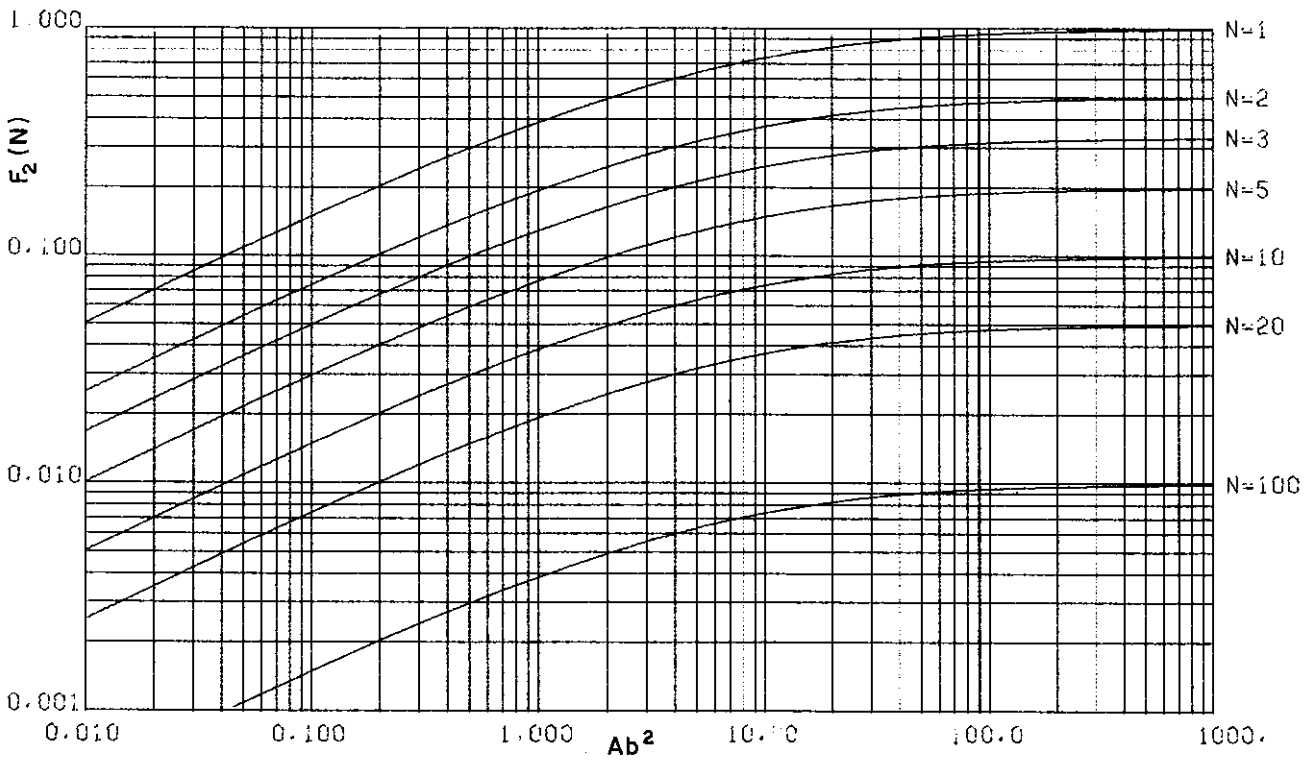


Figura IV.2 - Valores de  $F_2(N)$  considerando a função de correlação - BESSEL

## B) Considerando explicitamente a configuração da rede

Conforme será mostrado a seguir, o erro médio quadrático da estimativa da altura média de precipitação resultante de uma tempestade isolada, é expresso por Lenton e Rodrigues-Iturbe (1977) em função da configuração da rede, dada pela matriz de coordenadas  $\bar{U} = \{ u_1, u_2, \dots, u_N \}$ ; do peso atribuído a cada estação no cálculo da média,  $\bar{p} = \{ p_1, p_2, \dots, p_N \}$ ; do número  $N$  de estações; da função de correlação espacial  $r(u_i - r_{j,i})$  e da variância pontual do processo  $\sigma_p^2$ .

Expandindo a equação (IV.29), tem-se que:

$$EMQ = E \left[ z(A)^2 \right] - 2 E \left[ \hat{z}(A) \cdot z(A) \right] + E \left[ \hat{z}(A)^2 \right] \quad (IV.34)$$

onde, substituindo  $z(A)$  pela equação (IV.27) e  $\hat{z}(A)$  pela equação (IV.28), obtem-se que:

$$\begin{aligned} EMQ = & \int_A \int_A q(u_i) q(u_{j,i}) du_i du_{j,i} \\ & - 2 \sum_{i=1}^N p_i \int_A q(u) cov(u_i, u) du \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_i p_{j,i} cov(u_i, u_{j,i}) \end{aligned} \quad (IV.35)$$

Se a variável hidrológica  $Y(u)$ , dada pela equação (IV.23), pode ser considerada homogênea e isotrópica e tomando  $q(u) = 1/A$ , os termos da equação acima podem ser reescritos como:

$$\int_A \int_A q(u_i) q(u_{i'}) du_i du_{i'} = \sigma_p^2 a_A \quad (\text{IV.36})$$

onde:

$$a_A = \frac{1}{A^2} \int_A \int_A r(u_i - u_{i'}) du_i du_{i'} \quad (\text{IV.37})$$

é dado por (IV.33); e

$$\int_A q(u) \text{cov}(u_i, u) du = \sigma_p^2 b_A(u_i) \quad (\text{IV.38})$$

onde:

$$b_A(u_i) = \frac{1}{A} \int_A r(u_i - u_{i'}) du_{i'} \quad (\text{IV.39})$$

Desta maneira, obtem-se a equação do erro médio quadrático procurada, que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \text{EMQ} = E(\bar{U}, N, \bar{p}) &= \sigma_p^2 \left\{ a_A - 2 \sum_{i=1}^N p_i b_A(u_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N p_i p_{i'} r(u_i - u_{i'}) \right\} \quad (\text{IV.40}) \end{aligned}$$

O cálculo de  $b_A(u_i)$  para uma área retangular pode ser simplificado pelo uso da seguinte técnica: seja um ponto  $u_i$  no interior da área  $A$ , figura (IV.3), para este ponto a integral (IV.39) pode ser dividida em 4 termos:

$$b_A(u_i) = \int_A r(u_i - u) du = \sum_{j=1}^4 \int_{A_j} r(u_i - u) du \quad (IV.41)$$

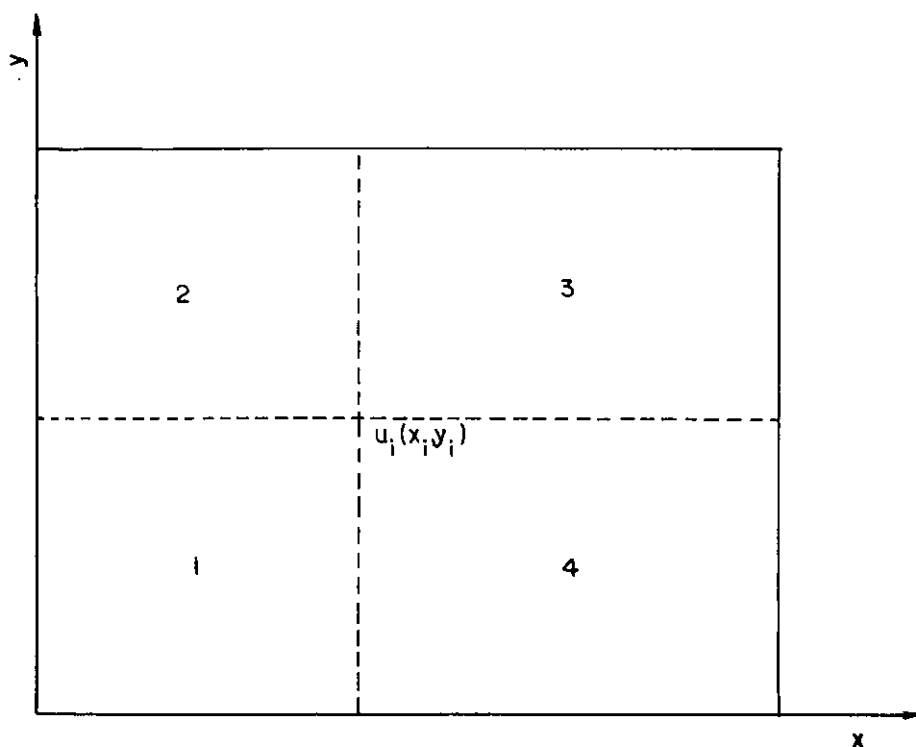


Figura IV.3 - Localização do ponto  $u_i$  na área  $A$

Cada uma dessas integrais, pode ser agora tratada como se o ponto  $u_i$  fosse a origem de uma sub-área, conforme mostrado na figura IV.4.

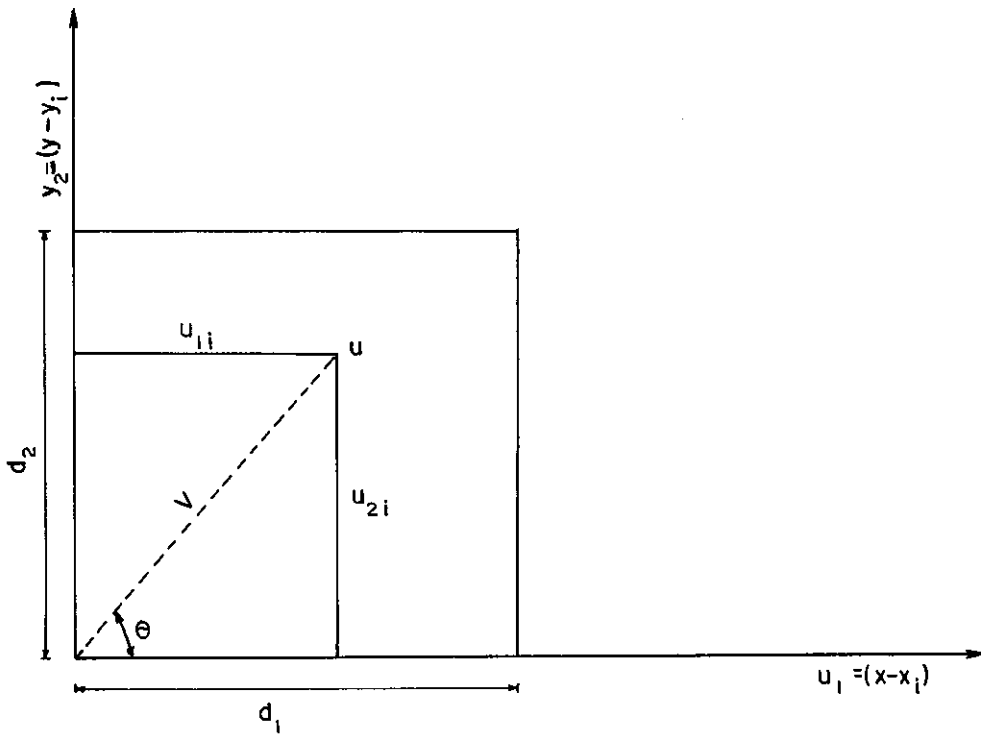


Figura IV.4 - Localização do ponto  $u$ , em uma sub-área  $A_j$ .

A integral correspondente a uma sub-área  $A_j$ , onde são conhecidos os seus lados  $d_1$  e  $d_2$ , é dada por:

$$\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} r \left[ (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \right] du_1 du_2 \quad (\text{IV.42})$$

Mudando o sistema de referências para coordenadas polares,  $u_1 = V \cos\theta$  e  $u_2 = V \sin\theta$ , e chamando a matriz Jacobiana da transformação de  $V$ , a integral acima se transforma em:

$$\int_0^D V r(V) \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta dV = \int_0^D (\theta_1 - \theta_2) V r(V) dV \quad (\text{IV.43})$$

onde  $D$  é a diagonal da sub-área retangular  $A_j$ . Os limites de integração  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são dados em função dos lados  $d_1$  e  $d_2$ .

Se  $d_1 \geq d_2$

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi/2 \quad 0 \leq V \leq d_2$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi/2 - \cos^{-1}(d_2/V) \quad d_2 < V \leq d_1 \quad (\text{IV.44})$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \sin^{-1}(d_2/V) - \cos^{-1}(d_1/V) \quad d_1 < V \leq D$$

Se  $d_2 > d_1$

$$\theta_1 - \theta_2 = \pi/2 \quad 0 \leq V \leq d_1$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \sin^{-1}(d_1/V) \quad d_1 < V \leq d_2 \quad (\text{IV.45})$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \sin^{-1}(d_1/V) - \cos^{-1}(d_2/V) \quad d_2 < V \leq D$$

Calculado numericamente o valor da integral (IV.43), com auxílio de (IV.44) e (IV.45), para cada uma das quatro sub-áreas  $A_j$ , o valor de  $b_A(u_i)$  é dado por:

$$b_A(u_i) = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^4 \int_{A_j} r(u_i - u) du \quad (\text{IV.46})$$

### IV.3 A OTIMIZAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DA REDE

Uma primeira análise da eficiência da atual configuração de uma rede, pode ser realizada comparando o seu erro médio quadrático com o erro que a rede teria se as suas estações fossem localizadas ao acaso sobre a área.

O valor esperado para a equação (IV.40), erro médio quadrático considerando explicitamente a configuração da rede, com respeito a  $\bar{U}$  sob a condição de que cada elemento de  $\bar{U}$  tem uma distribuição de probabilidade uniforme é exatamente a equação (IV.33), erro médio quadrático considerando as estações uniformemente distribuídas; isto é,

$$E \left[ E(\bar{U}, N, \bar{p}) \right] = \hat{E}(N) = \sigma_p^2 (1 - a_A) / N \quad (\text{IV.47})$$

Uma relação entre a equação acima e a equação (IV.40) define o número equivalente de estações,  $n_{eq}(\bar{U}, N, \bar{p})$ , que vem a ser o número de estações localizadas sobre a área, com uma distribuição de probabilidade uniforme independentes uma da outra, que seriam necessárias para se obter o mesmo erro dado por  $E(\bar{U}, N, \bar{p})$ . Matematicamente temos que:

$$E(\bar{U}, N, \bar{p}) = \hat{E}(N) = \sigma_p^2 (1 - a_A) / N \quad (\text{IV.48})$$



desde que:

$$N = n_{eq} (\bar{U}, N, \bar{p}) = \sigma_p^2 (1 - a_A) / E(\bar{U}, N, \bar{p}) \quad (IV.49)$$

A eficiência da atual configuração da rede pode então ser medida por  $n_{eq}$ . Se  $N < n_{eq}$  a rede é melhor que a normal, se  $N > n_{eq}$  a rede é inferior a normal. Quanto maior for  $n_{eq}$  melhor é a configuração da rede em estudo.

Uma característica da rede é o grau de dependência que o erro médio quadrático tem com a localização dos postos sobre a área. A medida desta dependência, pode ser obtida através da variância do erro médio quadrático com respeito a  $\bar{U}$ , assumindo que as estações são localizadas aleatoriamente sobre a área. Esta variância é muito difícil de ser estimada analiticamente, entretanto é possível estimá-lo através de uma simulação.

Se for possível afirmar que  $E(\bar{U}, N, \bar{p})$  independe da configuração da rede, o problema de otimização da rede se reduz consideravelmente. Se a rede é operada segundo um erro de estimativa máximo aceitável, a solução do problema dado por (II.3) é:

$$E(N) = \sigma_p^2 (1 - a_A) / N = E_{m\acute{a}x} \quad (IV.50)$$

donde

$$N^* = \sigma_p^2 (1 - a_A) / E_{m\acute{a}x} \quad (IV.51)$$

Os  $N^*$  postos devem então ser localizados de modo a se obter o custo mínimo. Todavia, o erro médio quadrático deve ser checado, pois pode ser que a hipótese de independência da configuração da rede não seja atendida neste caso. Se por exemplo, o custo mínimo levar a uma rede de configuração tal que as estações sejam muito próximas uma das outras, o erro médio quadrático pode se tornar maior que o aceitável.

Se o erro médio quadrático for sensível a configuração da rede, a otimização da rede é dada pela solução do problema (II.7). Brás e Rodrigues-Iturbe (1975), propõem que primeiro se resolva o problema em relação a  $\bar{U}$  fixando  $N$ . Resolvido o problema para diferentes valores de  $N$ , o mínimo absoluto em relação a  $\bar{U}$  e  $N$  é então obtido por enumeração. Ao fixar  $N=N_0$  tem-se o seguinte problema:

$$\min_{\bar{U}} G(\bar{U}, N_0) \quad (IV.52)$$

Uma vez que a função objetivo do problema acima não possui derivadas, os métodos de otimização por gradiente não podem ser aplicados a este caso. Devido ao grande número de "variáveis"  $\bar{U}$  que o problema pode ter, e pela facilidade de incorporar as restrições do problema ao método, o melhor processo de otimização para o problema (IV.52) é o método por busca aleatória.

O método por busca aleatória que será utilizado neste estudo foi proposto inicialmente por Brooks (1958). Neste método

do, a combinação dos fatores que formam a função objetivo é selecionada por algum processo aleatório. A combinação dos fatores que leva a função objetivo a um valor máximo ou mínimo, neste estudo a um valor mínimo, é escolhida como sendo a ótima.

Ao se aplicar o método por busca aleatória, dois objetivos devem ser fixados anteriormente:

- 1) O primeiro é a definição do que seja o ótimo da busca;
- 2) O segundo é a definição da probabilidade com que se aceita um valor encontrado como sendo o ótimo.

A melhor definição para o ótimo da busca é a descoberta da combinação dos fatores que minimiza a função objetivo. Todavia, como o valor mínimo da função objetivo não é conhecido, torna-se difícil atender a esta definição.

Uma outra definição do ótimo da busca, é a descoberta da combinação de fatores que leva a função objetivo a um valor "mínimo", de tal forma que não mais que uma determinada proporção K do espaço de soluções contenha valores melhores que o admitido como ótimo. O valor a ser atribuído a K depende do espaço de soluções do problema, se o espaço de soluções ótimas é grande, K também deve ser grande, caso contrário deve ser pequeno.

Ao se calcular o valor da função objetivo para uma dada combinação de fatores, a probabilidade de que este valor não

esteja no espaço de soluções ótimas é dado por  $(1-K)$ ; para  $n$  tentativas esta probabilidade é  $(1-K)^n$ . A probabilidade de que no mínimo uma das tentativas caiu no espaço de soluções ótimas é dada por:

$$p(K) = 1 - (1-K)^n \quad (IV.53)$$

donde:

$$n = \frac{\log(1-p(K))}{\log(1-K)} \quad (IV.54)$$

A tabela (IV.1) mostra o número de tentativas necessárias para satisfazer diversos valores de  $K$  e  $p(K)$ .

K	p (K)			
	0,80	0,90	0,95	0,99
0,10	16	22	29	44
0,05	32	45	59	90
0,01	161	230	299	459
0,005	322	460	598	919

Tabela IV.1 - Valores de  $n$  para as probabilidades  $K$  e  $p(K)$

A aplicação do método por busca aleatória para solução do problema (IV.52) pode ser feita seguindo os passos abaixo:

- 1) Estipula-se o número de postos que comporã a rede a ser otimizada;
- 2) Limita-se a variação das coordenadas dos postos dentro da área em estudo, com isto é fixado o espaço de soluções;
- 3) Seleciona-se ao acaso n combinações possíveis dos pontos da área;
- 4) Calcula-se o valor da função objetivo para cada uma das n combinações selecionadas em (3);
- 5) A combinação de fatores para qual a função objetivo apresentar o menor valor, é selecionada como sendo a ótima dentro das probabilidades escolhidas.

V.      APLICAÇÃO DAS METODOLOGIAS E DISCUSSÃO DOS  
RESULTADOS

Para exemplificar a aplicação das técnicas de planejamento e otimização de redes pluviométricas, apresentadas neste texto, será resolvido para duas redes pluviométricas, com diferentes objetivos de operação, o problema dado por (II.3) onde a rede é projetada de maneira a se ter: o menor custo possível e uma precisão definida por um erro máximo aceitável.

Considerando que as redes pluviométricas utilizadas neste trabalho estão localizadas em regiões que oferecem todas as facilidades de acesso a qualquer ponto de sua superfície, é bastante razoável admitir que o custo da rede independe de sua configuração, passando neste caso a depender exclusivamente do número de postos que a compõe, sendo dado portanto pela equação (II.10). Considerando ainda que existe uma relação inversa entre o custo e a precisão da rede (capítulo II); a solução do problema dado por (II.3) consiste em se obter o número mínimo de estações suficiente para que o erro de estimativa da altura média da precipitação sobre a área seja menor que o erro máximo admissível.

Como a definição do erro máximo depende da utilização dos dados e foge ao escopo deste trabalho, o planejamento da rede, quando o método permitir, será feito com base em gráficos que apresentam o erro para diversos números de postos. Nos casos em que não for possível esta solução, será fixado para efeito de

exemplificação um erro admitido como máximo aceitável.

No desenvolvimento teórico ficou evidente que o cálculo do erro depende do objetivo para qual a rede é operada. Desta forma, para uma melhor organização, este capítulo foi dividido em dois parágrafos onde serão discutidos em separado a aplicação e os resultados das metodologias apresentadas respectivamente nos capítulos III e IV.

#### V.1 REDE COM O OBJETIVO DE ESTIMAR A ALTURA MÉDIA SOBRE A ÁREA, DA PRECIPITAÇÃO MÉDIA ANUAL

As metodologias apresentadas no capítulo III foram aplicadas à rede pluviométrica localizada na área da 7ª zona hidrográfica do Estado de São Paulo, situada nas regiões norte e nordeste deste estado, ao sul do Estado de Minas Gerais, entre as latitudes de  $20^{\circ}\text{S}$  e  $23^{\circ}\text{S}$  e as longitudes de  $46^{\circ}\text{W}$  e  $49^{\circ}\text{W}$ . A área em estudo é formada principalmente pelas bacias dos rios Pardo e Sapucaí. Para uma superfície de aproximadamente  $40.000 \text{ Km}^2$ , a sua forma geométrica pode ser aproximada ao de um retângulo onde a base é duas vezes a altura. Com uma altitude variando entre 500 e 1000m, a topografia da área não apresenta mudanças bruscas, sendo que para uma mesma latitude há um declive topográfico com o aumento da longitude (figura V.1).

Desta forma, analisando isoladamente a área em estudo, pode-se dizer que apesar de não ser plana ela apresenta uma homogeneidade sob o ponto de vista topográfico, tendo-se portanto

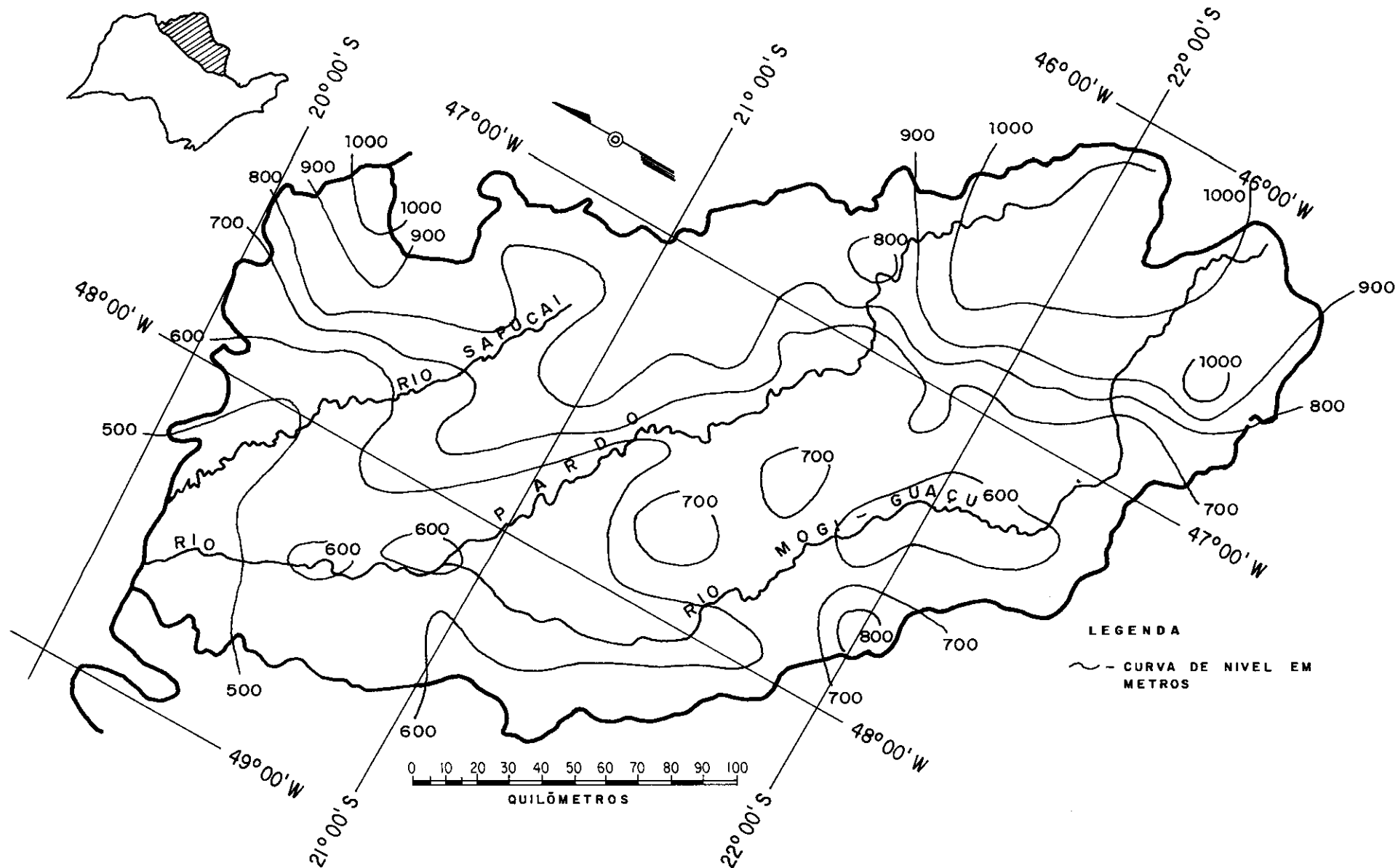


FIGURA V-1 - LOCALIZAÇÃO E TOPOGRAFIA DA ÁREA EM ESTUDO



grandes possibilidades de que ela seja isotrópica com respeito à função de correlação espacial. Entretanto, se for considerado que ao penetrar no Estado de Minas Gerais tem-se uma área montanhosa formada pelas serras da Canastra e da Mantiqueira, não se pode afirmar que a região como um todo conserva essa homogeneidade topográfica.

A área está localizada acima do trópico de Capricórnio, o que lhe proporciona um clima de características tropicais. O regime de precipitação anual da região é ditado principalmente pela invasão de frentes frias, fato responsável pela pouca variação espacial da altura de precipitação anual sobre a área estudada.

No estudo foram utilizadas as séries do total de precipitação acumulada anualmente de 47 postos pluviométricos com um período contínuo de operação de 11 anos, correspondente aos anos de 1958 a 1968, apresentadas em DAEE, 1970. A tabela V.1 apresenta a relação destes postos com suas coordenadas geográficas, altitude e média no período considerado da altura de precipitação anual. A localização dos postos sobre a área pode ser vista na Figura V.2. No período considerado (1958 a 1968) estes postos pluviométricos eram operados pelo Departamento de Águas e Energia Elétrica do Estado de São Paulo (DAEE-SP), pela Anderson Clayton e Cia. Ltda (ACCO) e Ferrovia Paulista S.A.(FEPASA).

TABELA V.1 - Características dos postos utilizados no estudo

IDENTIFICAÇÃO DO POSTO		LATITUDE S	LONGITUDE W	ALTITUDE (m)	MÉDIA ANUAL 1958-1968 (mm)
NA FIG. III.2	NO DAEE				
P1	B4-027	20°03'	47°45'	620	1522
P2	B4-002	20°14'	47°44'	865	1494
P3	B4-037	20°16'	47°29'	1032	1460
P4	B4-023	20°19'	47°36'	894	1521
P5	B4-006	20°21'	47°49'	572	1465
P6	B4-035	20°26'	47°50'	569	1393
P7	B4-047	20°31'	47°50'	601	1388
P8	B4-018	20°34'	47°56'	600	1613
P9	B4-001	20°33'	47°24'	824	1574
P10	B4-003	20°39'	47°41'	610	1465
P11	B4-015	20°44'	47°53'	735	1616
P12	B4-005	20°50'	47°19'	755	1488
P13	B4-012	20°47'	47°46'	730	1442
P14	B5-004	20°44'	48°04'	540	1340
P15	B5-021	20°10'	48°40'	471	1352
P16	B5-002	20°34'	48°34'	523	1221
P17	B5-028	20°44'	48°32'	610	1306
P18	B5-036	20°59'	48°33'	580	1560
P19	C3-014	21°32'	46°39'	884	1535
P20	C3-026	21°30'	46°46'	755	1652
P21	C3-035	21°38'	46°54'	672	1422
P22	C4-034	21°10'	47°46'	518	1360
P23	C4-083	21°13'	47°36'	558	1349
P24	C4-083	21°13'	47°36'	569	1401
P25	C4-007	21°21'	47°44'	805	1416
P26	C4-050	21°25'	47°25'	610	1398
P27	C4-049	21°25'	47°22'	610	1331
P28	C4-040	21°29'	47°01'	665	1434
P29	C4-041	21°39'	47°31'	715	1584
P30	C4-029	21°50'	47°16'	644	1367
P31	C4-085	21°58'	47°26'	611	1392
P32	C4-021	21°55'	47°41'	826	1396
P33	C4-071	21°58'	47°44'	850	1488
P34	C5-040	21°01'	48°13'	503	1340
P35	C5-025	21°15'	48°19'	590	1410
P36	C5-020	21°30'	48°03'	506	1281
P37	C5-009	21°30'	48°09'	604	1385
P38	D3-022	22°03'	46°59'	653	1491
P39	D3-003	22°12'	46°45'	710	1613
P40	D3-041	22°20'	46°44'	677	1608
P41	D3-030	22°36'	46°32'	745	1584
P42	D3-015	22°27'	46°50'	626	1250
P43	D3-032	22°23'	46°56'	629	1163
P44	D4-032	22°06'	47°24'	605	1296
P45	D4-030	22°09'	47°19'	575	1311
P46	D4-029	22°16'	47°22'	635	1307
P47	D4-027	22°22'	47°15'	650	1397

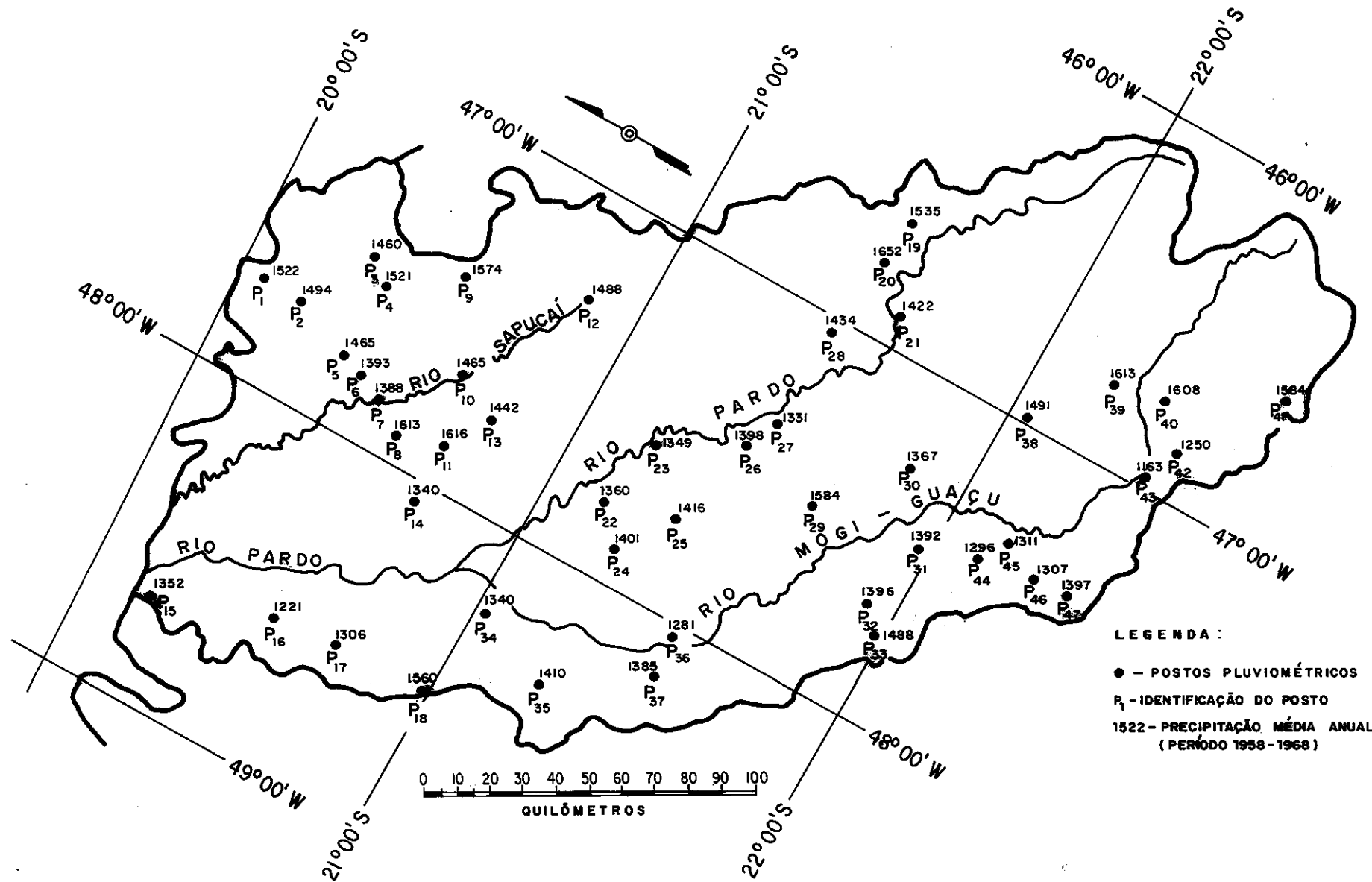


FIGURA V-2 - LOCALIZAÇÃO dos POSTOS PLUVIOMÉTRICOS

### V.1.1 Ajuste da Correlação Espacial

Na área em estudo as funções de correlação espacial para áreas isotrópicas, apresentadas no parágrafo III.1.1, são expressas por:

$$r(d) = 1 - (d/515,49) \quad (V.1)$$

$$r(d) = 0,849 \times \exp (-d/758,25) \quad (V.2)$$

$$r(d) = 1/(1+0,0032 d) \quad (V.3)$$

$$r(d) = \exp (-0,00243 d) \quad (V.4)$$

$$r(d) = 0,00569 d \times K_1 (0,00569 d) \quad (V.5)$$

Os parâmetros das quatro primeiras equações foram ajustados pelo método dos mínimos quadrados sobre as funções linearizadas. O parâmetro da equação (V.5) foi determinado a partir da equação (V.4), através do conceito de distância característica da correlação. Para uma área unitária semelhante a estudada, forma retangular com  $\alpha = 2$  (base igual a 2 vezes a altura), esta distância é de 0,5691 (tabela III.1). Mantendo a proporcionalidade entre as diagonais da área unitária (1,58) e da área em estudo (318 Km), conclue-se que a distância característica da correlação nesta última é de  $d_{cr} = 115$  Km. Com esta distância na equação (V.4), tem-se uma correlação de 0,756, que substituída na equação (III.19) fornece  $b = 0,00569$ . Na figura V.3 estão plotadas as correlações lineares entre as alturas de precipitação anual dos 47 postos, bem como as equações a elas ajustadas.

Devido a grande dispersão apresentada pelos pontos des

ta figura, fica-se inclinado a concluir que a área em estudo, não é isotrópica com respeito a correlação espacial. Desta forma, foi ajustado aos dados a equação (III.31) para áreas anisotrópicas tendo-se obtido a seguinte equação:

$$r(d) = 0,853 \times \exp(-d(1,4 \times 10^{-3} - 2,55 \times 10^{-4} \times \cos 2 \theta + 2,20 \times 10^{-5} \times \sin 2 \theta)) \quad (V.6)$$

apresentada graficamente na figura V.5. Por esta equação as elipses resultantes dos traçados das isolinhas em cada estação têm:

- 1) um ângulo de  $5^{\circ}$  no sentido horário entre o seu eixo maior e a direção este;
- 2) uma taxa de decaimento, da correlação com a distância, no eixo maior de  $C_1 = 1,15 \times 10^{-3}$  e no eixo menor de  $C_2 = 1,65 \times 10^{-3}$ ; e
- 3) um grau de elipsidade de  $R_c = 0,70$ .

Na equação (V.6) nota-se que os multiplicadores do seno e do cosseno são muito próximo de zero. Considerando estes multiplicadores iguais a zero, a equação resultante será uma equação muito parecida com a equação (V.2); desta forma, a seguinte questão pode ser colocada: quanto o modelo de correlação com a distância melhora ao se considerar a área anisotrópica? Como resposta foi calculado o somatório do quadrado dos desvios entre as correlações observadas e as simuladas por cada uma das seis equações ajustadas. Comparando os resultados apresentados

na tabela V.2, verifica-se que não hã uma mudança significativa entre os resultados das equações considerando a área isotrôpica e o da equação considerando a área anisotrôpica.

EQUAÇÃO	$\sum (r_o - r_s)^2$
V.1	22,58
V.2	15,73
V.3	18,63
V.4	20,23
V.5	24,11
V.6	15,63

TABELA V.2 - Somatório do quadrado dos desvios entre as correlações observadas ( $r_o$ ) e as simuladas ( $r_s$ ) pelos modelos de correlação.

Desta forma, é bastante provável que a grande dispersão dos pontos usados para o ajuste das funções de correlação es pacial seja um consequência do baixo número de anos de observação (11 anos) utilizados no estudo.

Agrupando os pontos (calculando o valor esperado da distância e da correlação para cada intervalo de 10 Km), observa-se a tendência do decaimento da correlação com a distância. Ajustando-se para estes novos pontos as funções de correlação com distância para áreas isotrôpicas obtem-se:

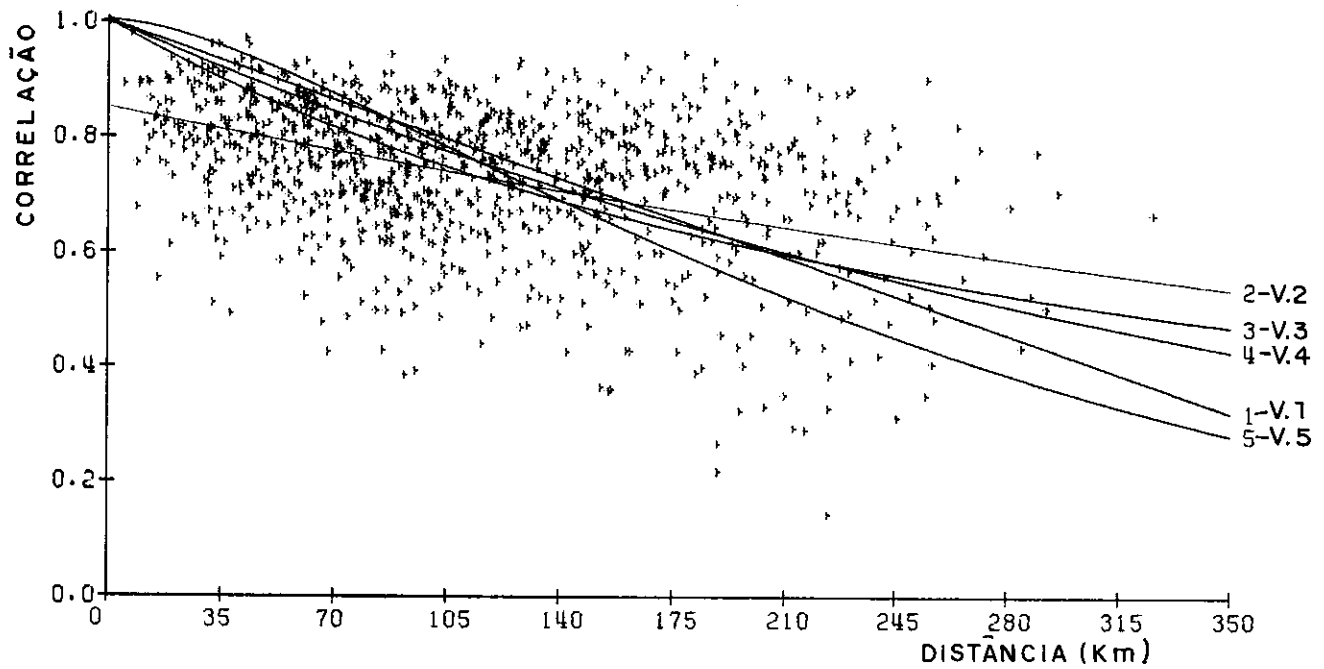


Figura V.3 - Ajuste das funções de correlação com a distância  
(Dados sem agrupar)

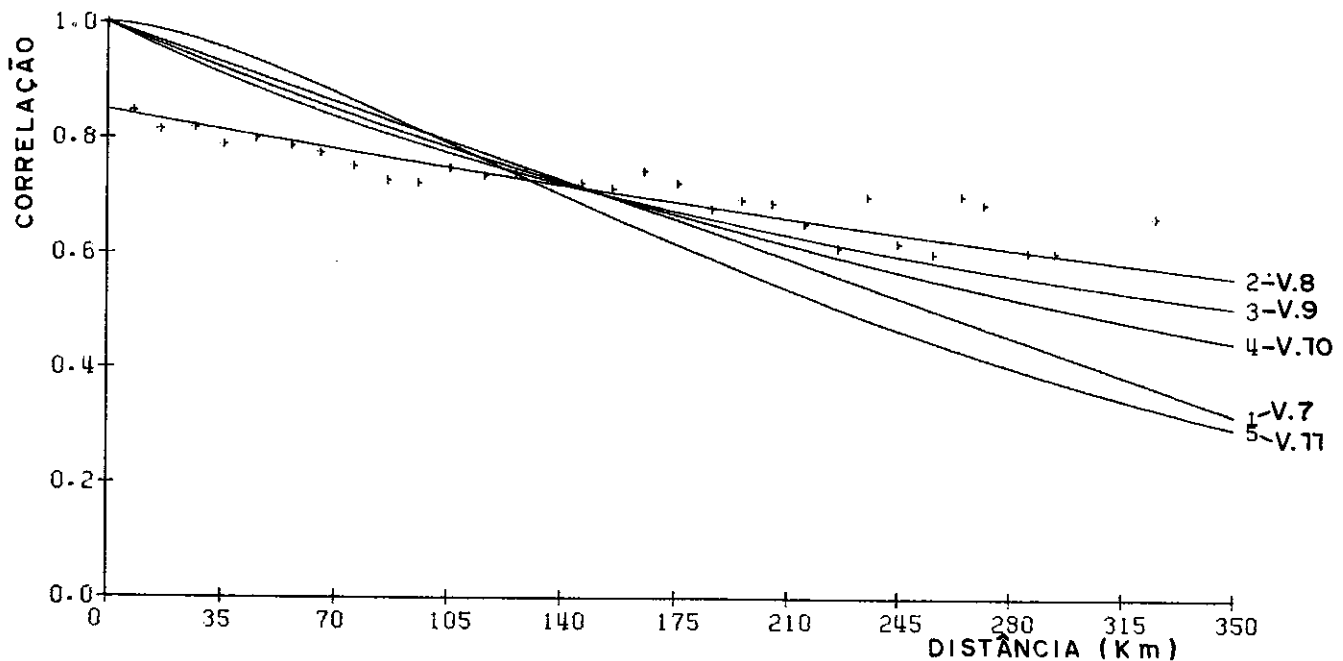


Figura V.4 - Ajuste das funções de correlação com a distância  
(Dados Agrupados)

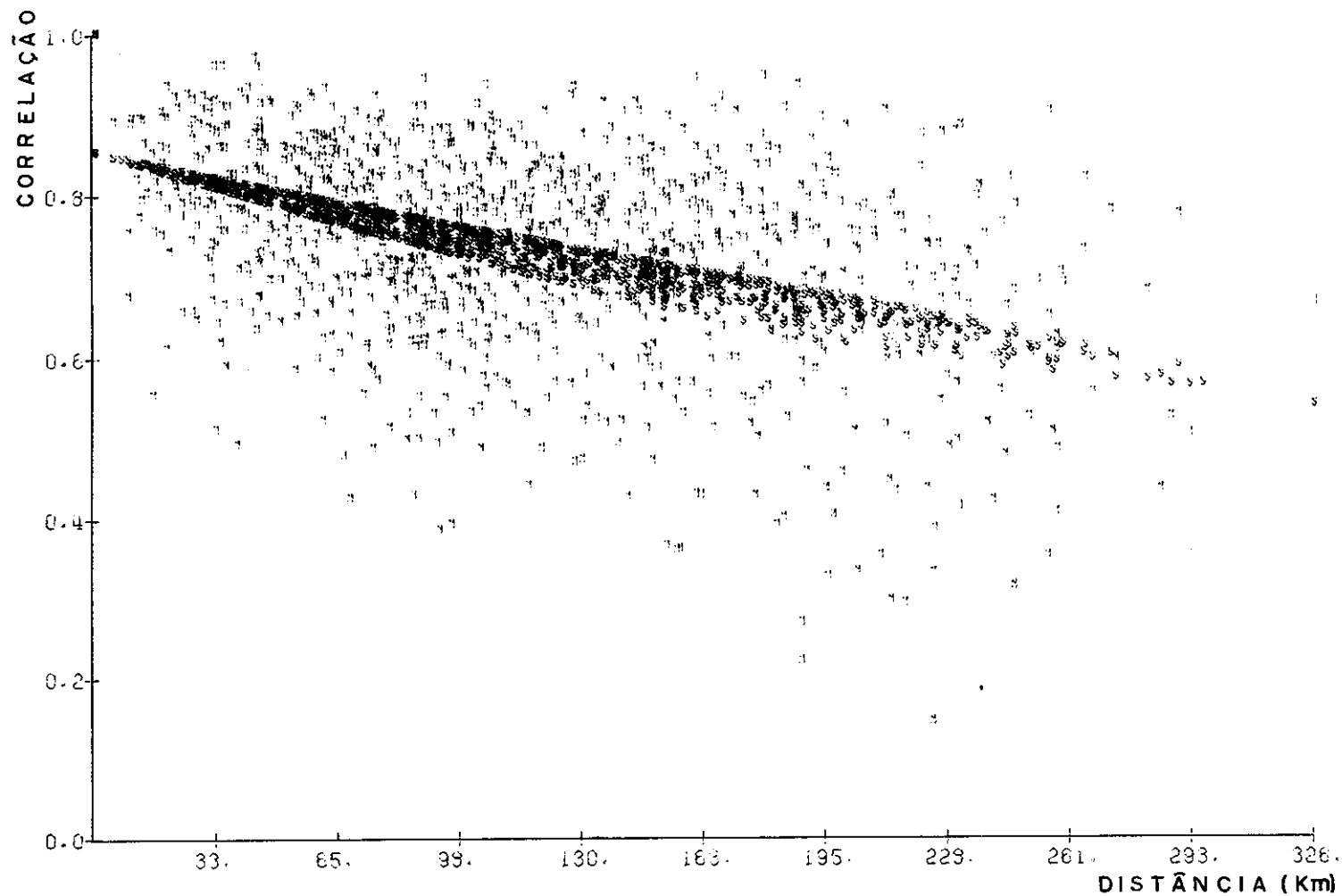


Figura V.5 - Ajuste da função de correlação considerando a área anisotrôpica



$$r(d) = 1 - (d/515,41) \quad (V.7)$$

$$r(d) = 0,849 \times \exp (-d/758,25) \quad (V.8)$$

$$r(d) = 1/(1 + 0,00276 d) \quad (V.9)$$

$$r(d) = \exp (-0,0023 d) \quad (V.10)$$

$$r(d) = 0,00550 d \times K_1 (0,00550 d) \quad (V.11)$$

Na figura V.4 são mostrados os pontos agrupados e as equações ajustadas.

Comparando os parâmetros das equações ajustadas aos dados em forma agrupada ou não, conclui-se que para o mesmo tipo de equação os parâmetros obtidos não se diferenciam de forma considerável.

Pelos resultados apresentados neste parágrafo, para a consecução deste trabalho serão consideradas as equações, para áreas isotrópicas, ajustadas aos dados não agrupados.

### V.1.2 O Planejamento da Rede

#### a) Método prático:

As recomendações da Organização Meteorológica Mundial, tabela II.2, para áreas semelhantes a estudada, isto é, formada principalmente de superfície plana com 40.000 Km<sup>2</sup> de área, é de que o número de estações pluviométricas deve ser de 44 a 66. Logo a densidade existente satisfaz essas recomendações mínimas. Entretanto, é bom esclarecer que o objetivo para o qual a rede em questão está sendo analisada, é o de estimar a altura média

sobre a área, em um longo período de tempo, da precipitação anual, e as recomendações da OMM não especificam os objetivos para os quais a rede é operada, subentendendo-se que uma rede com a densidade recomendada deve ter objetivos mais amplos.

b) Método da variância relativa do erro

Expressando a função de correlação espacial pela equação (V.2), e estimando o coeficiente de variação pontual da altura de precipitação anual através do valor esperado dos coeficientes de variação em cada posto da região; a variância relativa do erro (equação III.41) para a área em estudo é dada por:

$$Z_N = 0,2184 \sqrt{\frac{1 - 0,849 + \frac{0,23}{758,25} \sqrt{\frac{40000}{N}}}{N}} \quad (V.12)$$

A solução da equação acima para diversos valores de N é apresentada em forma gráfica na Figura V.6, de onde pode-se concluir que a partir de N igual a 10 ou 15 postos, o aumento do número de postos pluviométricos contribui muito pouco para a diminuição da variância relativa do erro no cálculo da precipitação média anual sobre a área. Para 10 postos tem-se uma variância relativa do erro de 0,029, que se reduz a 0,023 para 15 postos.

Desta forma, a altura média sobre a área da precipitação média anual, em um longo período de tempo, pode ser estimada pela média dos valores observados em 10 postos, uniformemente distribuídos sobre a área, com um erro de  $\pm 0,029 \bar{P}$ .

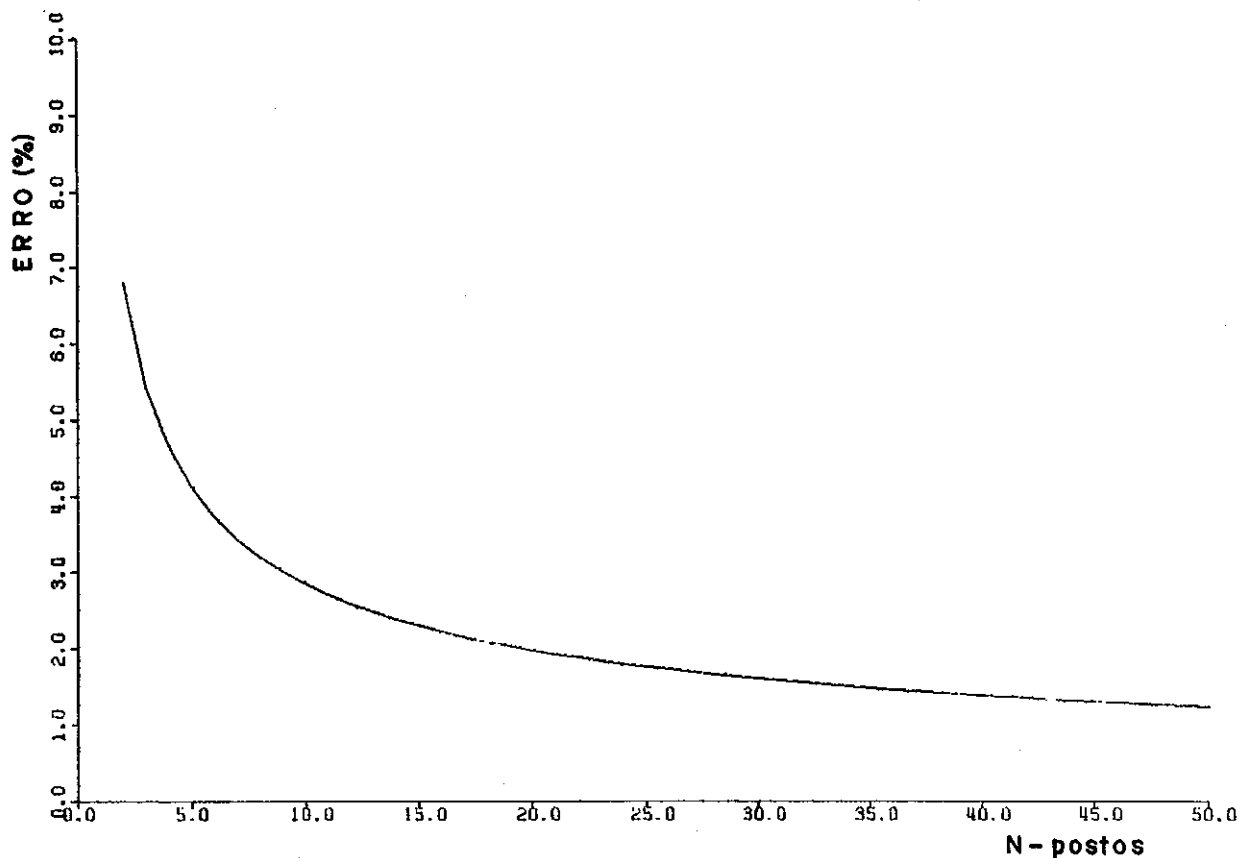


Figura V.6 - Solução do método da variância relativa do erro

### c) Método dos fatores de redução da variância

Considerando que as séries anuais de altura de precipitação pluviál podem ser independentes no tempo (Yevjevich, 1964; Rodrigues-Iturbe e Mejía, 1974), o fator de correlação devido a amostragem no tempo,  $F_1(T)$ , foi calculado para  $\rho=0,00$ .

O cálculo do fator de correção devido a amostragem no espaço,  $F_2(N)$ , foi feito considerando-se duas funções de correlação espacial, dadas pelas equações (V.4) e (V.5).

A redução total da variância,  $F_1(T) \times F_2(N)$ , foi calculada para  $T = (5, 7, 10, 11, 15, 20, 30, 50, 100 \text{ anos})$  e  $N = (1, 2, \dots, 50 \text{ postos})$ , sendo os resultados apresentados nas

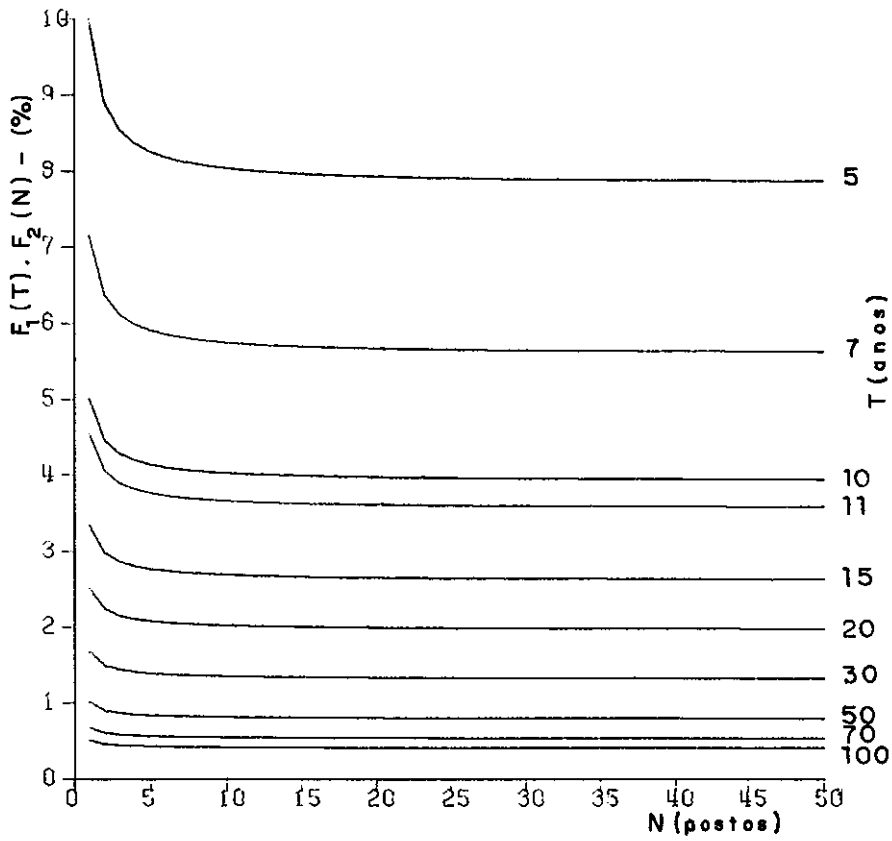


Figura V.7 - Solução do método dos fatores de redução da variância (Função de correlação - EXPONENCIAL)

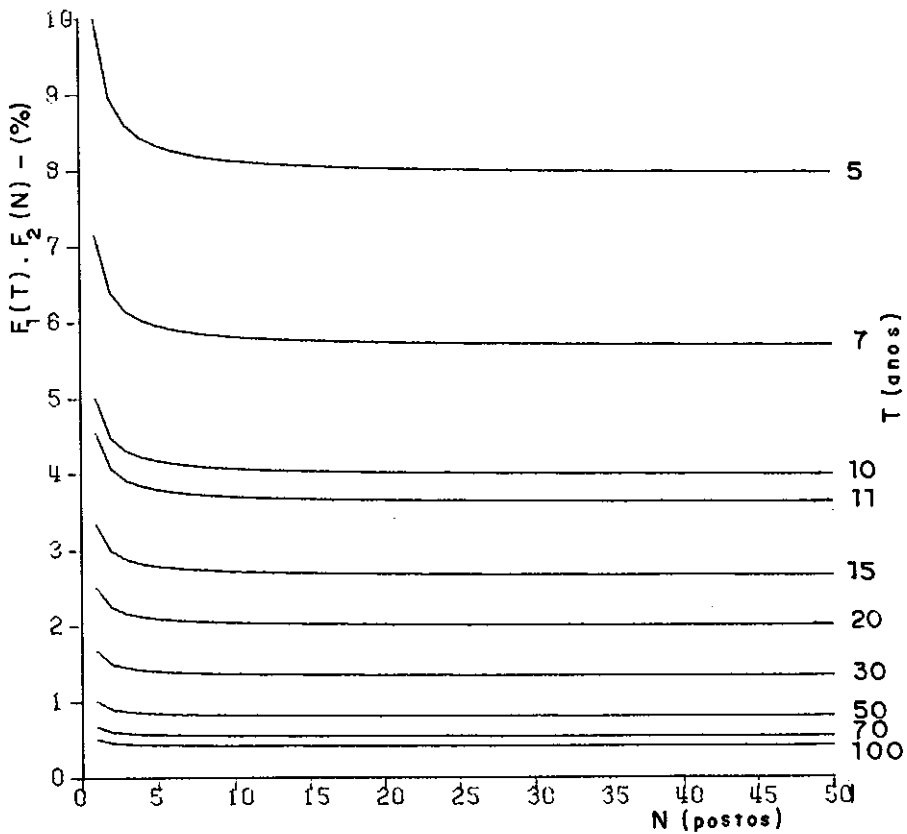


Figura V.8 - Solução do método dos fatores de redução da variância (Função de correlação - BESSEL)

figuras V.7 e V.8. Nestas figuras pode-se observar que:

- 1) A redução total da variância pontual é praticamente a mesma quer se considere a correlação espacial expressa pela função de Bessel ou exponencial. Isto se deve ao fato das mesmas terem sido ajustadas considerando-se a distância característica de correlação.
- 2) A redução total da variância pontual diminui mais rapidamente com o aumento do número de anos de observação do que com o aumento de número de postos, sendo então a influência do fator  $F_1(T)$  maior que a de  $F_2(N)$ .
- 3) Para a situação da rede, 11 anos de operação, a partir de  $N = 6$  postos o acréscimo de novos postos pouco contribui para a redução total da variância. Neste caso  $F_1(11) \times F_2(6) = 0,074$ . De outro lado para um período de observação maior, por exemplo 50 anos e  $N = 6$  postos, se obtém  $F_1(50) \times F_2(6) = 0,016$ . Conclui-se que a média de longo tempo da precipitação média anual na área pode ser estimada por 6 postos com um erro médio quadrático de 0,074 da variância pontual.

d) Método baseado na integração da superfície de precipitação

A constatação pelos dois métodos anteriores de que, para a estimativa da média sobre a área em estudo da altura de precipitação média anual, o número de postos instalados pode ser reduzido, possibilita a aplicação deste método.

Uma vez que, alguns dos modelos matemáticos utilizados neste trabalho para representar a superfície de precipitação, expressam a dependência da altura de precipitação média anual com as características fisiográficas (latitude, longitude e altitude) dos pontos de medição, é imprescindível que se faça uma análise da distribuição da rede em relação a estas variáveis. Chama-se a atenção de que esta análise é uma decorrência da própria definição de rede pluviométrica, que se utiliza das informações coletadas nos pontos com medição para estimá-las nos demais pontos da área, o que torna necessário a caracterização de todos pontos da área pelos pontos com coleta.

Logicamente que esta análise deveria ser feita através de uma distribuição conjunta das três variáveis fisiográficas envolvidas. Entretanto, neste estudo cada variável foi analisada separadamente, uma vez que este procedimento já permite que se tenha uma idéia aproximada da distribuição dos pontos sobre a área.

As distribuições da latitude, da longitude e da altitude dos pontos, com e sem medição, da área estão apresentadas em forma de frequência respectivamente nas figuras V.9, V.10 e V.11, de onde se conclui que:

- 1) Os pontos da área tem uma distribuição próxima da uniforme em relação a latitude, o mesmo acontecendo com os postos de medição. Na figura V.9 pode-se observar que todas as latitudes que interceptam a área estão caracterizadas, praticamente com a mesma frequência, pelas latitudes dos pontos de medição.

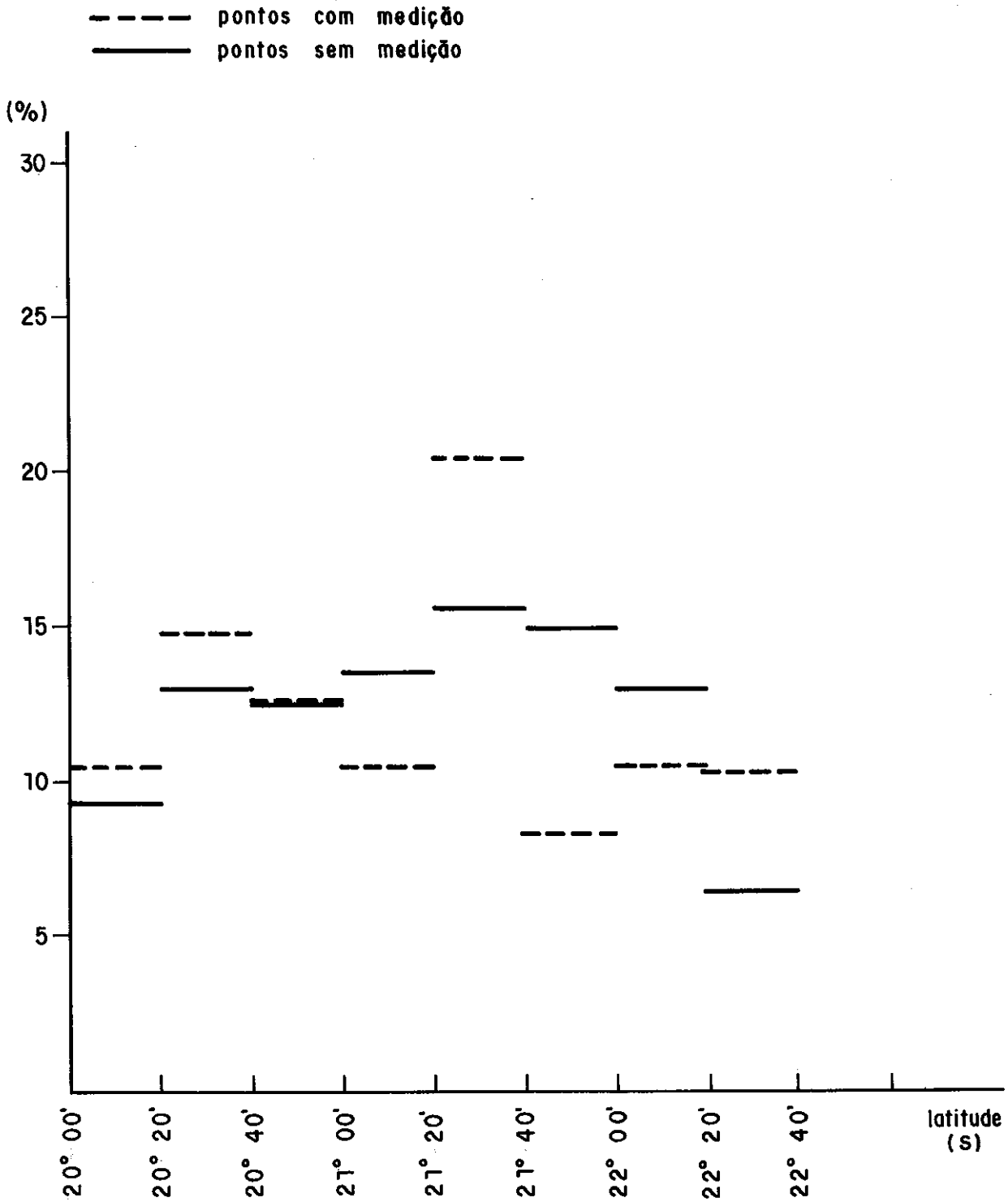


FIGURA V - 9 - DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS COM E SEM MEDIÇÃO EM RELAÇÃO A LATITUDE

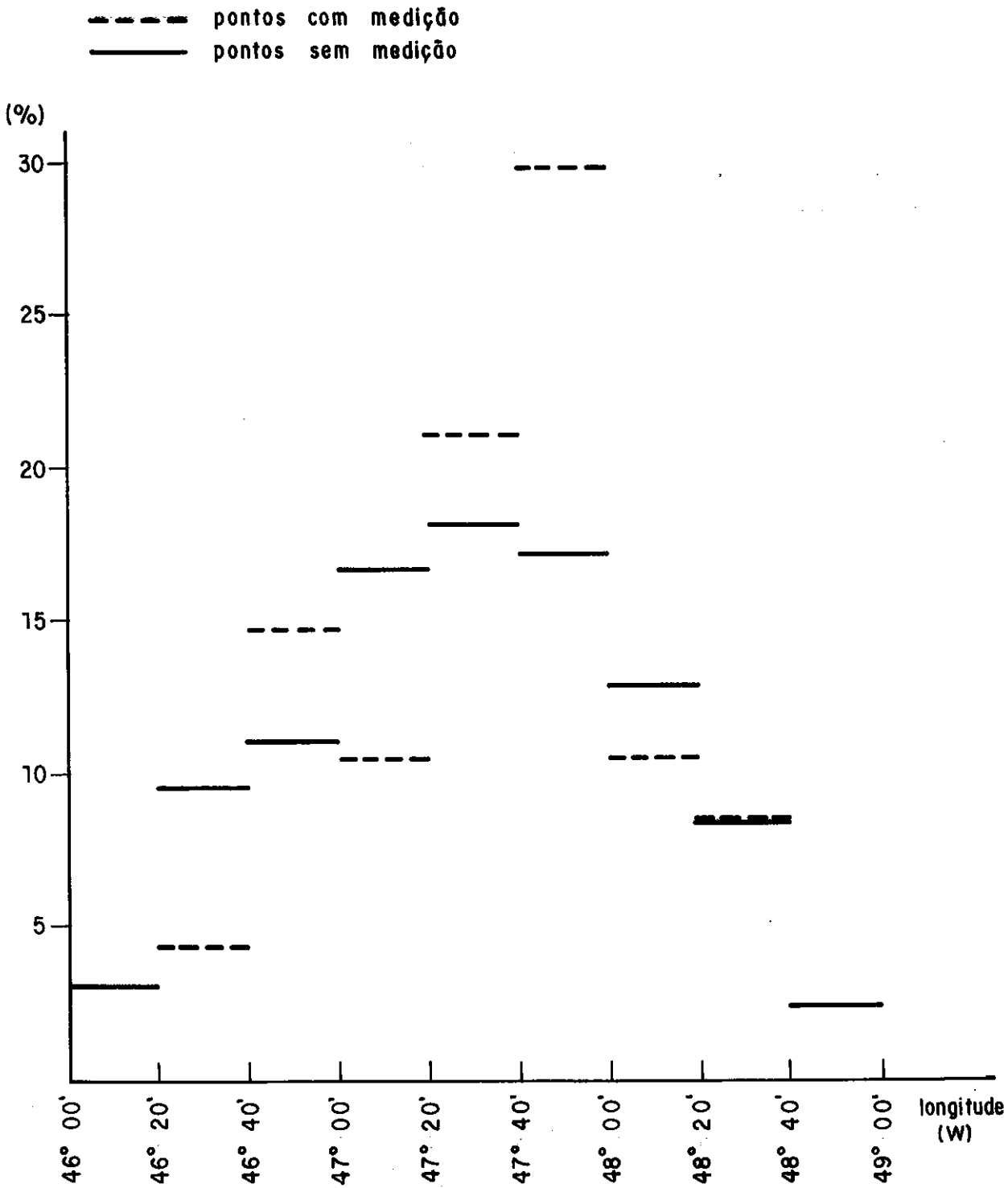


FIGURA V-10 - DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS COM E SEM MEDIÇÃO EM RELAÇÃO A LONGITUDE



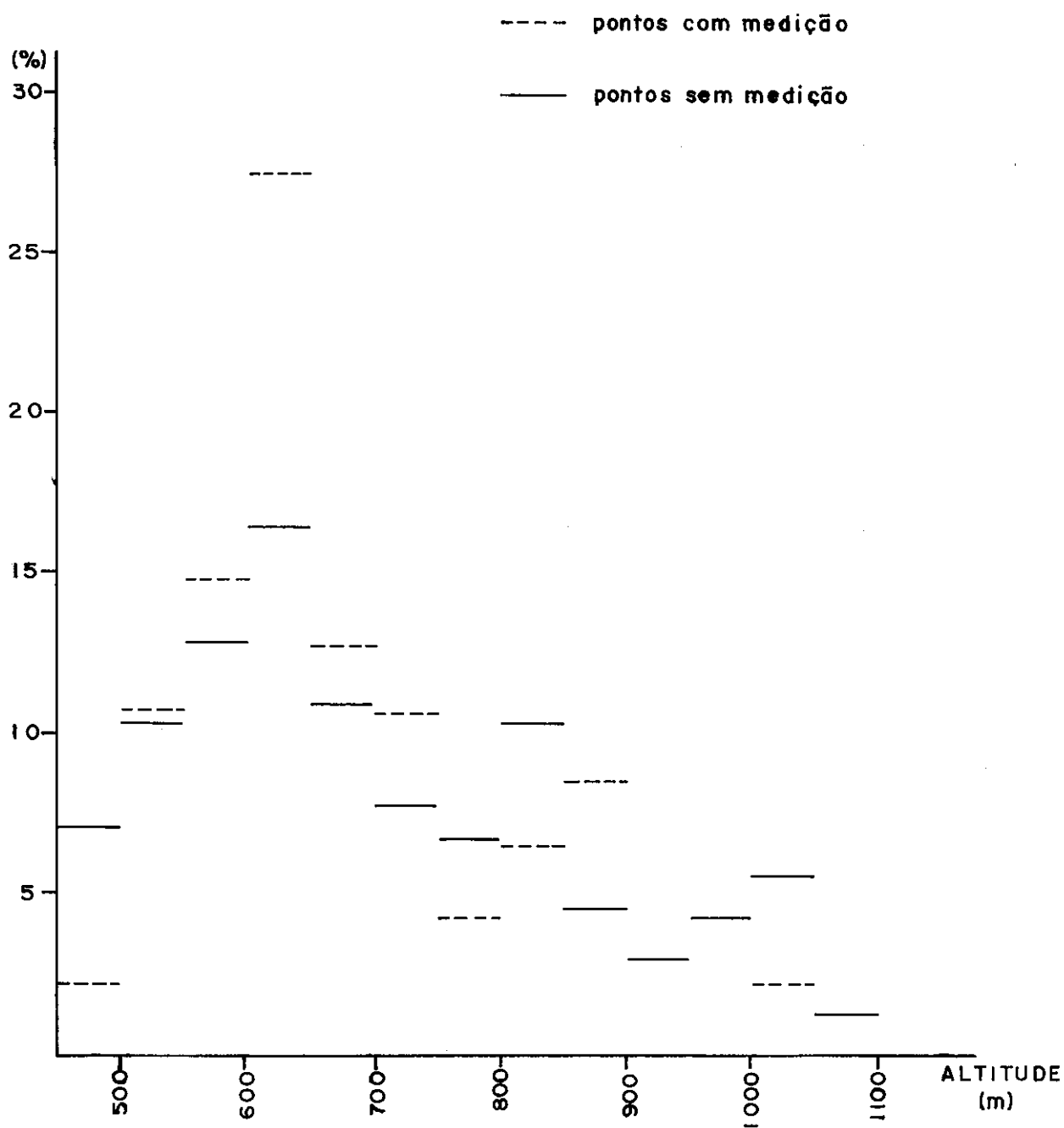


FIGURA V.II DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS COM E SEM MEDIÇÃO EM RELAÇÃO A SUA ALTITUDE

- 2) Para uma área localizada entre as longitudes de  $46^{\circ}$  W e  $49^{\circ}$  W tem-se mais de 50% da área entre as longitudes de  $47^{\circ}$  W e  $48^{\circ}$  W estando também nesta faixa instalado cerca de 60% dos postos pluviométricos. Apesar de apenas 5% da área, em relação à longitude, não possuir postos de medição (entre as longitudes de  $46^{\circ} 00' W$  a  $46^{\circ} 20' W$ , e  $48^{\circ} 40' W$  a  $49^{\circ} 00' W$ ), não se pode afirmar que os postos estão bem localizados na área com respeito à esta coordenada geográfica, conforme pode ser visto na figura V.10.
- 3) Na figura V.11, com a distribuição dos postos em relação à altitude dos pontos da área, pode ser observado que com exceção das altitudes acima de 900m, que representa aproximadamente 14% da área com apenas um posto pluviométrico, todas as demais altitudes estão caracterizadas com pontos de medição.

A seleção do modelo de superfície de precipitação que melhor se ajusta aos dados da área em estudo, foi feita entre sete modelos: cinco de superfícies polinomiais considerando a latitude e a longitude, um modelo linear múltiplo considerando as duas variáveis anteriores e a altitude, e um de interpolação (superfície multiquadrática cônica circular reta).

Entre os modelos de superfícies polinomiais com a latitude e a longitude, o que melhor se ajusta aos dados de acordo com a equação(III.69) é o do sexto grau, isto é,  $n=6$  na equação(III.68).

A escolha entre os modelos polinomiais que consideram a latitude e a longitude, e o modelo que considera a latitude, a longitude e a altitude pode ser feita através da análise do coeficiente de regressão linear múltipla ou através de equações que consideram o desvio entre os valores observados e os calculados nos postos utilizados para o ajuste do modelo. Todavia, é impossível a aplicação dessas equações para uma comparação entre estes modelos e os multiquadráticos, uma vez que nos modelos multiquadráticos o desvio entre os valores observados e os calculados nos postos usados para o ajuste do modelo é zero.

Diante deste impasse a seleção do modelo de superfície de precipitação, entre os sete propostos, foi feito com base no procedimento de calibração-validação de modelos, ou seja:

- 1) inicialmente escolheu-se 12 postos distribuídos de forma regular sobre a área;
- 2) com os 35 postos restantes foram ajustados os sete modelos a serem comparados;
- 3) para cada um dos 12 postos indicados em (1), calculou-se o desvio entre os valores observados e os calculados por cada um dos sete modelos; e
- 4) a comparação entre o somatório dos desvios ao quadrado, obtidos de (3), permitiu a seleção do modelo.

Pelo procedimento acima concluiu-se que o modelo de superfície multiquadrática é o que melhor representa a superfície de precipitação sobre a área em estudo, conforme mostrado na ta

bela V.3. Desta forma, para a aplicação do método de planejamento de rede pluviométrica baseado na integração da superfície de precipitação, foi utilizado o modelo de superfície multiquadrática cônica circular reta.

POSTO	h <sub>o</sub> (mm)	(h <sub>o</sub> - h <sub>c</sub> ) (mm)					MODELO LINEAR MÚLTIPLO	MODELO MULTI- QUADRÁ- TICO
		MODELO POLINOMIAL						
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6		
P 6	1393	- 69	-116	-125	-67	-141	-48	-43
P14	1340	- 83	-101	-85	-28	-365	-68	41
P16	1221	-208	-148	-231	-176	-108	-162	-25
P20	1652	113	132	157	246	90	-151	-180
P22	1360	-56	-58	-60	-116	-207	-41	-116
P26	1398	-36	-16	-25	-5	-176	-35	-174
P31	1392	-10	31	17	-77	-64	-17	-51
P35	1410	7	-63	41	59	-79	25	63
P36	1281	-112	-167	-109	-139	109	-87	40
P38	1491	41	68	64	86	44	50	-117
P43	1163	-275	-231	-159	-18	145	-260	12
P46	1307	-89	-44	-45	52	-104	-98	160
Σ(h <sub>o</sub> - h <sub>c</sub> ) <sup>2</sup>		170.035	159.345	150.338	149.401	302.690	147.066	127.890

Tabela V.3 - Desvio entre as alturas de precipitação média anual observadas,  $h_o$ , e as calculadas,  $h_c$ .

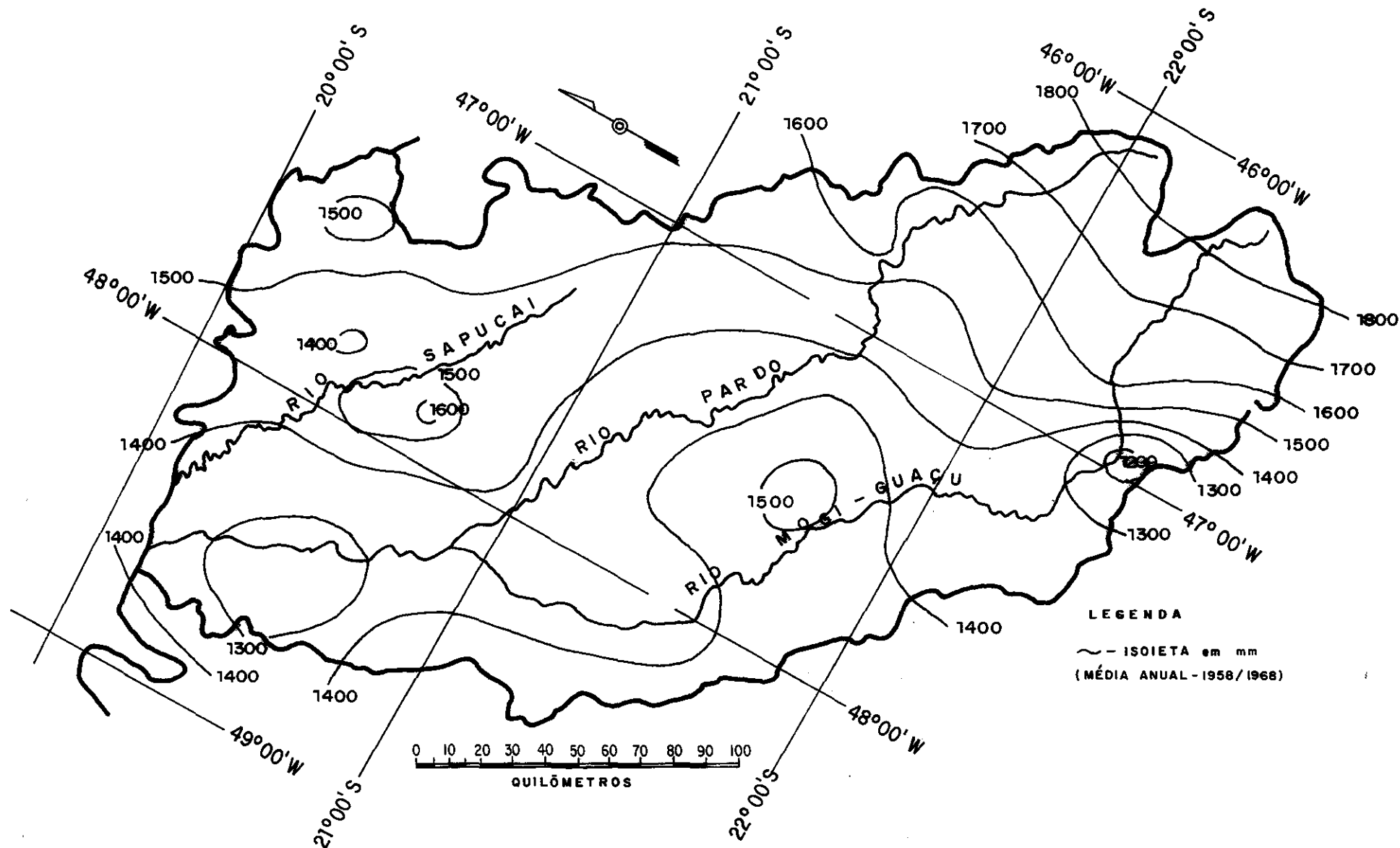


FIGURA V-12 - REDE DE ISOIETAS A PARTIR DO MODELO DE SUPERFÍCIE MULTICUADRÁTICA

Após ter sido ajustada a superfície de precipitação (multiquadrática) aos dados dos 47 postos pluviométricos, foi estimada a altura média sobre a área da precipitação média anual integrando-se numericamente a equação (III.65), tendo sido obtido o valor de 1458 mm. A rede de isoietas, resultante da projeção desta superfície de precipitação em um plano, está apresentada na figura V.12.

Para a aplicação do método de planejamento de rede pluviométrica em discussão, foram extraídas 20 amostras aleatórias para valores de  $N' = \{ 5, 10, 15, 20, 25, 30 \text{ postos} \}$ . A média e o desvio padrão da altura média sobre a área da precipitação média anual, cada valor de  $N'$  estão apresentados na figura V.13.

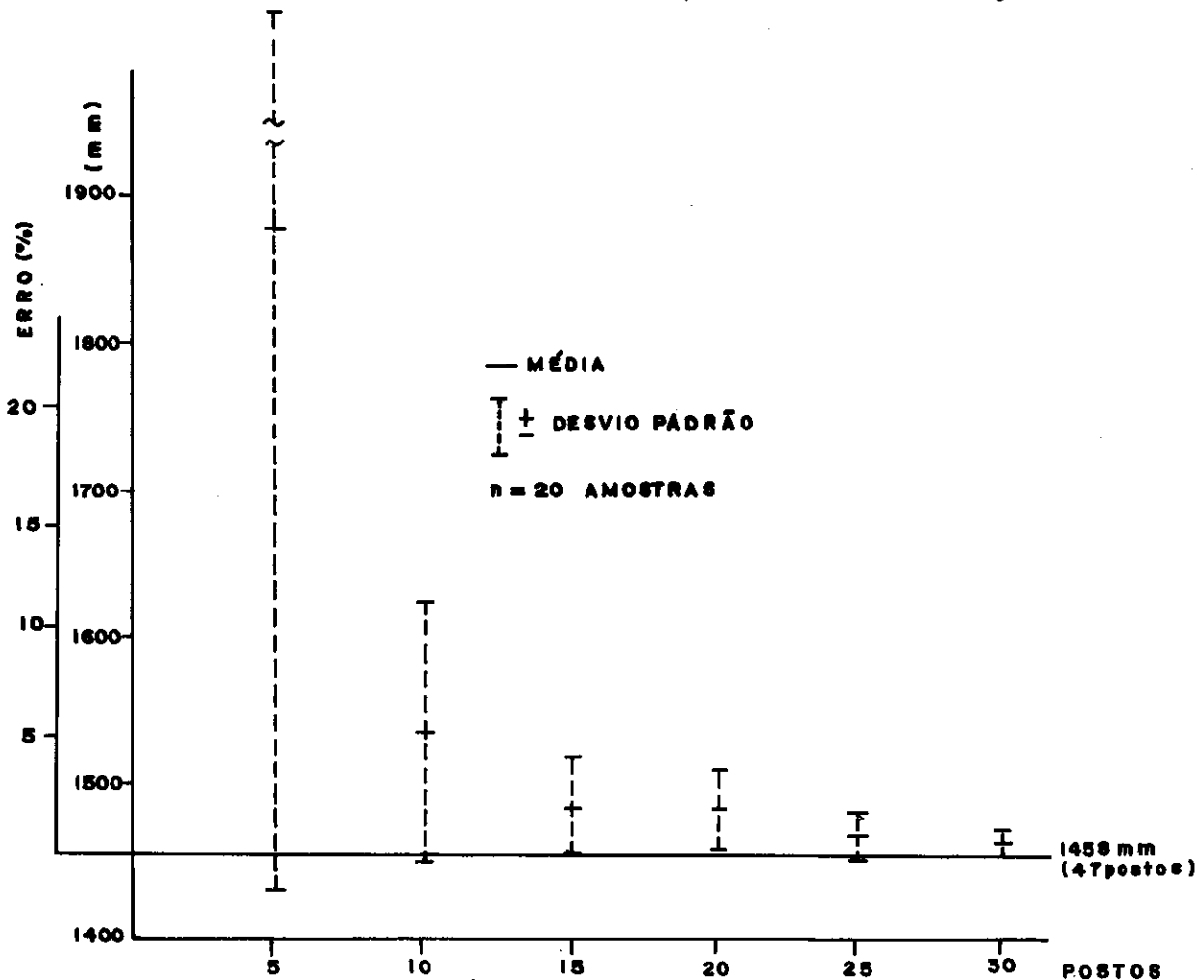


Figura V.13 - Altura média sobre a área da precipitação anual

Desta figura verifica-se que para  $N' \geq 15$  postos, o erro cometido é menor que 5%, em outras palavras isto quer dizer que 15 postos pluviométricos são suficientes para que o erro no cálculo da altura média sobre a área, da precipitação média anual, seja de 5%.

### V.1.3 Síntese dos Resultados

- a) A área estudada pode ser considerada homogênea e isotrópica com respeito a função de correlação com a distância.
- b) O ajuste das funções de correlação com a distância, que servem de base para a análise da variabilidade espacial da altura de precipitação sobre a área, pode ser feita, em áreas homogêneas e isotrópicas, usando todos os pontos ou agrupando-os, uma vez que as funções obtidas se assemelham muito nos dois casos. Para a área em estudo, a função proposta por Kagan foi a que melhor se ajustou aos dados observados.
- c) As três metodologias, discutidas neste trabalho, para o dimensionamento do sistema de coleta de dados de uma rede pluviométrica, quando aplicadas à área em estudo, indicaram que a estimativa da altura média sobre a área da precipitação anual, pode ser feita com uma precisão suficiente usando um número de postos inferior (10 a 15) ao existente (47) e ao recomendado pela OMM (44 a 66).

- d) Utilizando o conceito de distância característica da correlação para ajustar o parâmetro  $b$  da função de Bessel a partir da função exponencial negativa, obtem-se os mesmos resultados no planejamento da rede pelo método dos fatores de redução da variância.
- e) Pelo método de integração da superfície de precipitação é possível avaliar o impacto da desativação dos postos de uma rede pluviométrica. A representação da superfície de precipitação média anual através do modelo de interpolação de superfície multiquadrática cônica circular reta, parece ser mais adequada que os modelos de superfícies polinomiais, de acordo com o critério de calibração - validação aqui empregado.

## V.2. REDE PARA MEDIR A ALTURA MÉDIA, SOBRE A ÁREA, DA PRECIPITAÇÃO DE UMA TEMPESTADE ISOLADA

A teoria apresentada no capítulo IV sobre o planejamento de uma rede pluviométrica com o objetivo de estimar a altura média sobre a área da precipitação oriunda de uma tempestade isolada, foi aplicada à rede pluviográfica da cidade do Rio de Janeiro. No período considerado neste estudo, 1974 a 1976, estavam em operação na cidade do Rio de Janeiro 47 postos pluviográficos, sendo 37 deles operados pela Superintendência Estadual de Rios e Lagoas (SERLA), e os demais pelo Instituto Nacional de Meteorologia, pela Diretoria de Eletrônica e Proteção ao Voo e pela Diretoria de Hidrografia e Navegação. Entretanto, este estudo se baseou nos dados coletados nos 33 postos, operados pela SERLA, instalados entre as latitudes de  $22^{\circ}47'S$  e  $23^{\circ}03'S$ , e as longitudes de  $43^{\circ}10'W$  e  $43^{\circ}35'W$ . Na Tabela V.4 e na Figura V.14 têm-se a relação e a localização destes postos.



TABELA V.4 - POSTOS PLUVIOGRÁFICOS UTILIZADOS NO ESTUDO

IDENTIFICAÇÃO NA FIGURA	NOME DA ESTAÇÃO	LATITUDE S	LONGITUDE W
P01	Cidade Universitária	22°51'	43°14'
P02	Benfica-CCPL	22°53'	43°15'
P03	Funabem	22°54'	43°19'
P04	Morro do Encantado	22°55'	43°16'
P05	Praça Rocco	22°56'	43°16'
P06	Leopoldo	22°56'	43°15'
P07	Regina Coeli	22°56'	43°14'
P08	Saboia Lima	22°56'	43°14'
P09	Elevatória Botafogo	22°57'	43°10'
P10	Chácara do Cabeça	22°57'	43°13'
P11	Horto Florestal	22°58'	43°14'
P12	Parque da Cidade	22°59'	43°14'
P13	Elevatória Copacabana	22°59'	43°11'
P14	Caiçaras	22°59'	43°12'
P15	Elevatória Leblon	22°59'	43°13'
P16	Ilha do Governador	22°49'	43°13'
P17	Lobo Junior	22°49'	43°16'
P18	Parada de Lucas	22°49'	43°18'
P19	Irajá	22°49'	43°20'
P20	São Jerônimo	22°50'	43°21'
P21	COPEBA	22°53'	43°21'
P22	Florianópolis	22°54'	43°21'
P23	Cidade de Deus	22°57'	43°22'
P24	Via 11	23°00'	43°22'
P25	Cafundá	22°54'	43°23'
P26	Realengo	22°52'	43°26'
P27	Eletrobrás	22°55'	43°25'
P28	Laboratório Nuclear	22°58'	43°24'
P29	Camorim	22°57'	43°27'
P30	Mucuiaba	22°56'	43°29'
P31	Batalha	22°55'	43°30'
P32	Mendanha	22°52'	43°33'
P33	Realengo	22°55'	43°34'

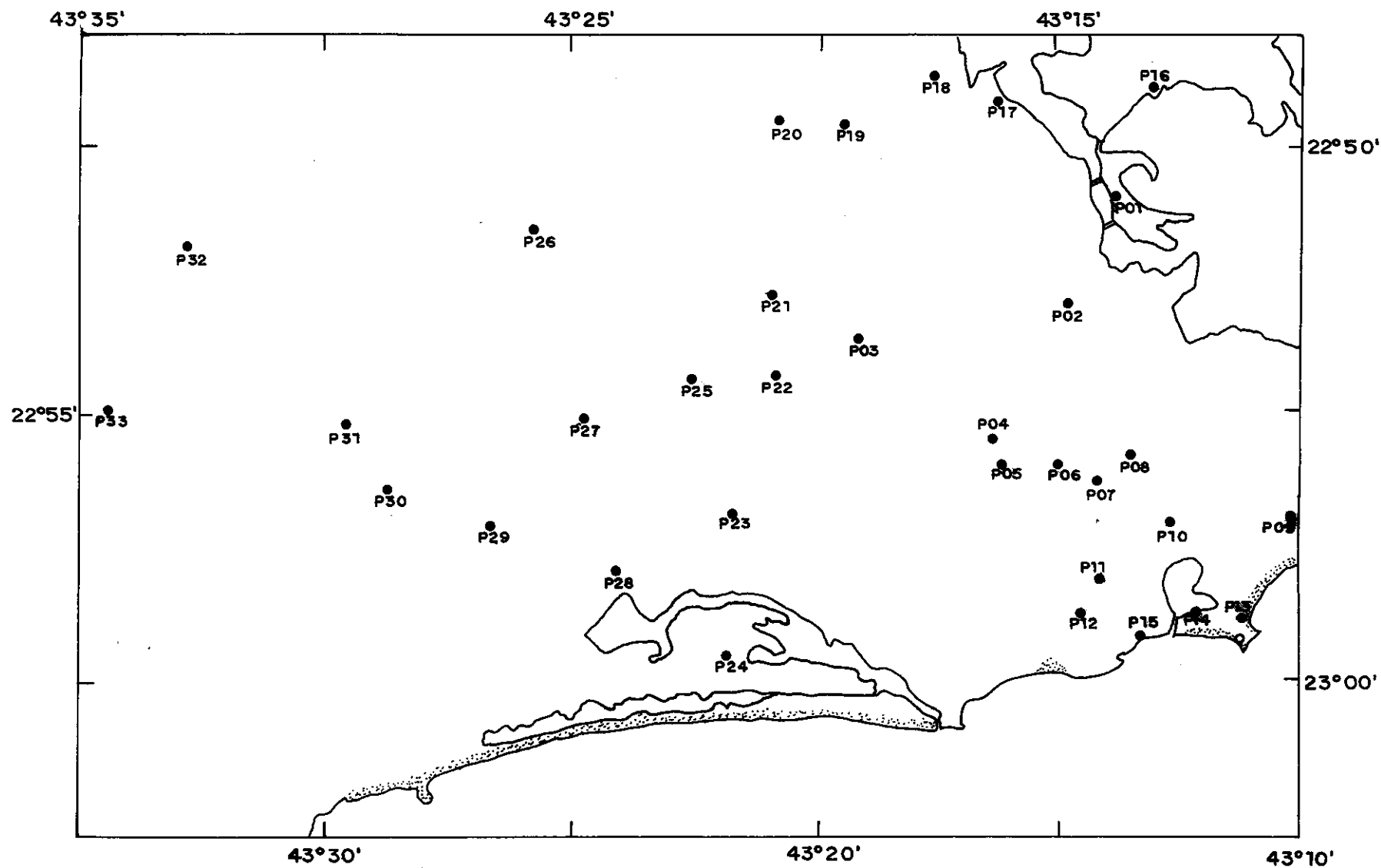


FIGURA V-14 - LOCALIZAÇÃO DOS POSTOS PLUVIOGRÁFICOS

A área delimitada por estas coordenadas é formada por diversas bacias hidrográficas urbanas, que durante os meses de "verão", novembro a fevereiro, são atingidas por chuvas de formações convectivas e/ou orográficas de curta duração mas de grande intensidade.

#### V.2.1 Modelo de Área - Altura

Para o ajuste das equações de área-altura apresenta - das no parágrafo IV.1, foram selecionados 11 eventos com duração inferior a duas horas, ocorridos no "verão" dos anos de 1974 a 1976.

A cada um destes eventos foi ajustada uma hipersuperfície imaginária de precipitação, utilizando-se da metodologia da superfície multiquadrática cônica circular reta. Com a projeção desta hipersuperfície no plano, obteve-se para cada um dos 11 eventos o traçado da rede de isoietas, espaçadas a cada 3mm. A área entre duas isoietas foi determinada, discretizando a superfície total em quadrados de aproximadamente 400m de lado, calculando a seguir o valor da altura de precipitação no centro de cada um desses quadrados. A título de ilustração é mostrada nas figuras V.15 a V.18 a rede de isoietas para 4 desses eventos.

Em 8 desses eventos pode ser obtido mais de 5 isoietas fechadas, em 1 deles 3 isoietas fechadas e em 2 deles apenas duas isoietas fechadas. A essa massa de dados foram ajusta dos dois modelos de distribuição espacial de chuva (fórmula área-altura).

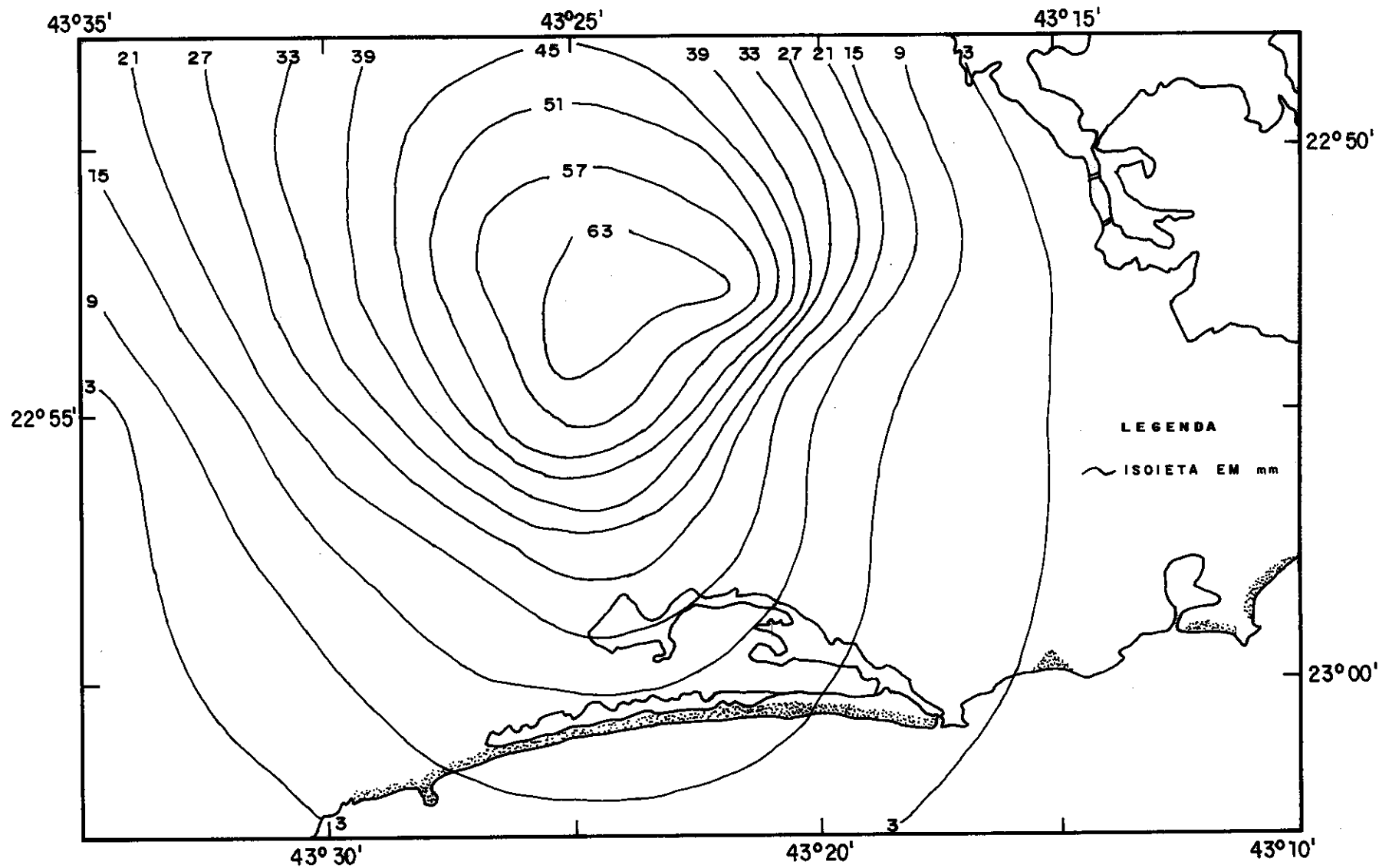


FIGURA V-15 - CHUVA DE FORMAÇÃO CONVECTIVA E/OU OROGRÁFICA OCORRIDA NO DIA 8/JAN/75

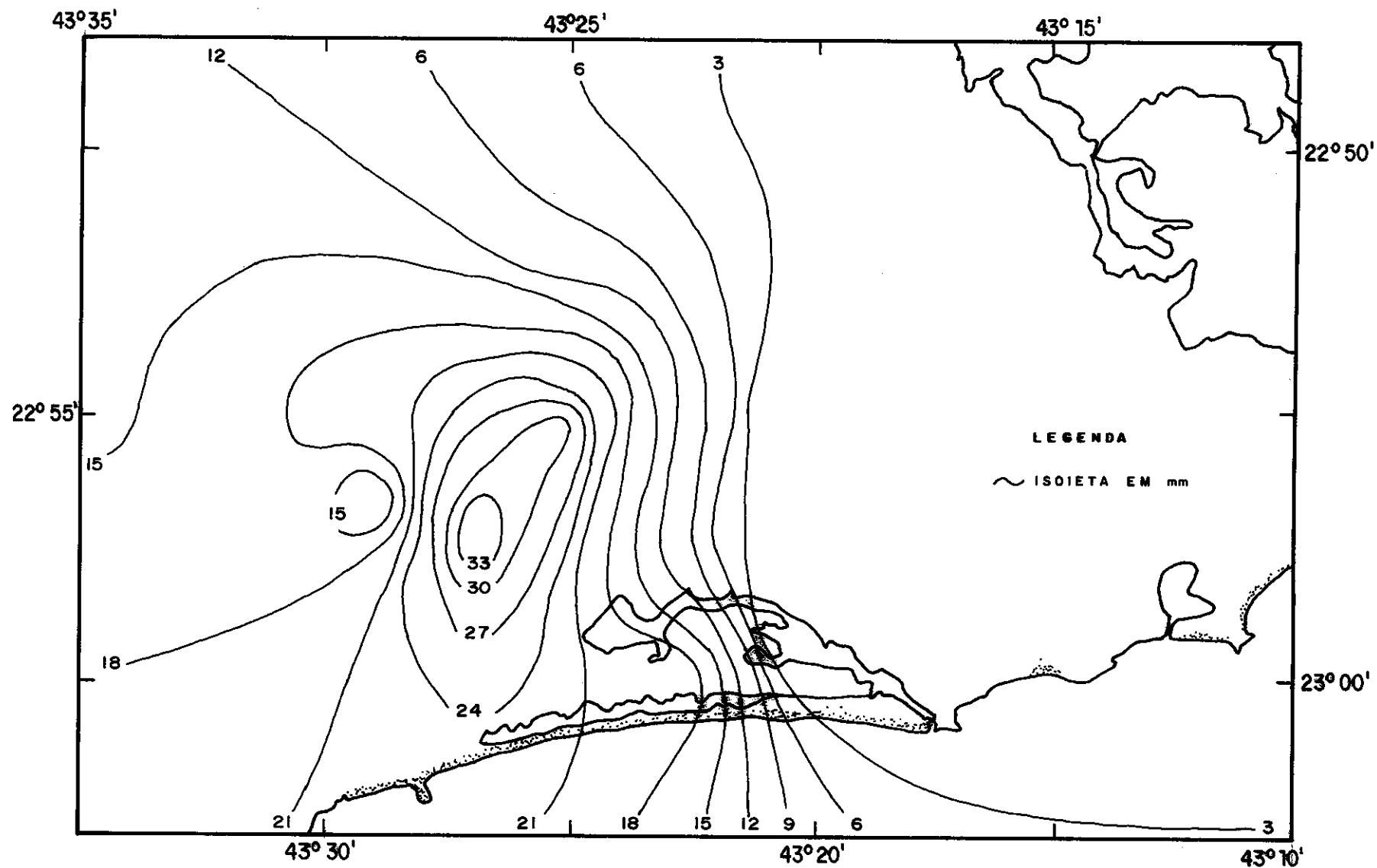


FIGURA V-16 - CHUVA DE FORMAÇÃO CONVECTIVA E/OU OROGRÁFICA OCORRIDA NO DIA 19/JAN/74

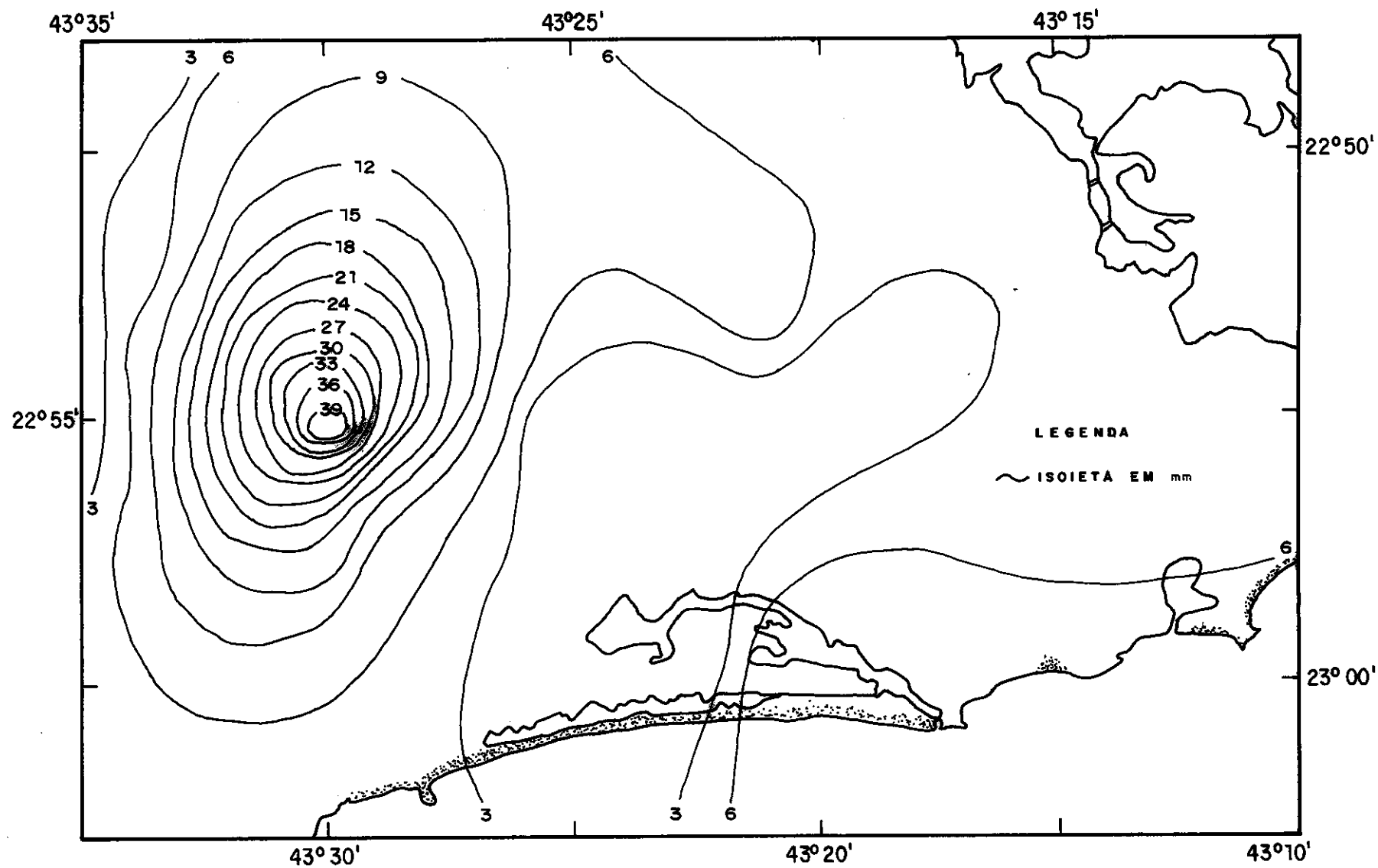


FIGURA V-17 - CHUVA DE FORMAÇÃO CONVECTIVA E/OU OROGRÁFICA OCORRIDA NO DIA 8/FEV/73

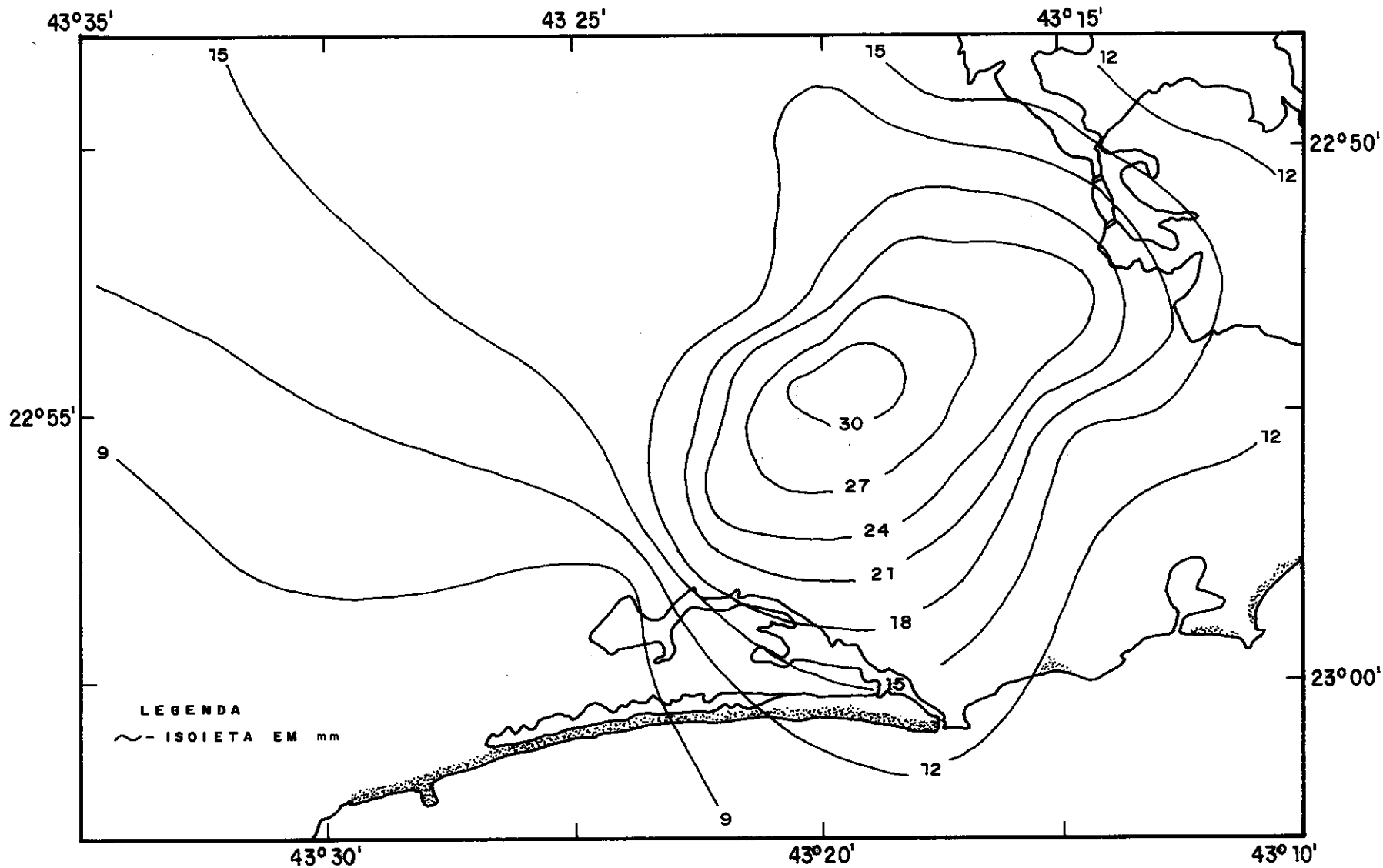


FIGURA V-18 - CHUVA DE FORMAÇÃO CONVECTIVA E/OU OROGRÁFICA OCORRIDA NO DIA 5/NOV/76

a) Modelo de Woolhiser e Szhwalen

Os dados ajustados à equação (IV.3), resultou em:

$$\log_{10} A = 1,4 \log_{10} w - 0,1091 \quad (V.13)$$

onde  $w = P_0 - P(d)$ .

O ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, se deu com um coeficiente de correlação linear de 0,88, e a soma do quadrado da diferença entre os valores observados e os simulados pelo modelo é de 95,18.

A equação (V.13) pode ser escrita como:

$$A = 0,7778 w^{1,4} \quad (V.14)$$

ou

$$P = P_0 - 1,197 A^{0,714} \quad (V.15)$$

Assumindo que as áreas entre as isoietas podem ser aproximadas para áreas circulares, a equação acima resulta em:

$$P = P_0 - 2,71 r^{1,428} \quad (V.16)$$

b) Modelo de Fogel e Duckstein

O coeficiente de dispersão,  $b_1$ , de cada evento foi de



terminado ajustando a equação (IV.4) a cada um deles. Com a finalidade de se ter uma equação que traduza o coeficiente de dispersão da chuva para toda a área, foi ajustada a equação  $b = b_1 e^{-aP_0}$  aos valores de  $b_1$  anteriormente calculados, tendo sido obtido a seguinte equação:

$$\log_e b = -0,0125 P_0 - 4,629 \quad (V.17)$$

que foi ajustada pelo método dos mínimos quadrados, com um coeficiente de correlação linear de -0,25.

Aproximando as áreas limitadas pelas isoietas para anéis circulares, a fórmula de área-altura, proposta por Fogel e Duckstein, para a região em estudo é dada por

$$P = P_0 e^{-b \pi r^2} \quad (V.18)$$

onde

$$b = 0,00977 e^{-0,0125 P_0} \quad (V.19)$$

A soma do quadrado dos desvios entre os valores observados e os obtidos pelas equações (V.18) e (V.19), para os 11 eventos analisados, foi de 376,49.

### c) Seleção do modelo área-altura

Os valores obtidos para o coeficiente de correlação linear e para a soma das diferenças ao quadrado dos dois modelos ajustados indicam que o modelo proposto por Woolhiser e Szghalen,

é o que melhor representa a distribuição espacial das chuvas con vectivas com menos de duas horas de duração para a cidade do Rio de Janeiro. Entretanto é bom ressaltar que o pequeno número de eventos analisados, apenas 11, não permite uma afirmação mais concreta sobre esta conclusão.

Para todos efeitos, no que segue, será utilizado o mo delo de área-altura de Woolhiser e Szhwalen dado pela equação (V.16).

Na figura V.19 é dado a altura de precipitação a uma distância  $r$ , do centro da área atingida pela precipitação, para diversos valores de  $P_0$ .

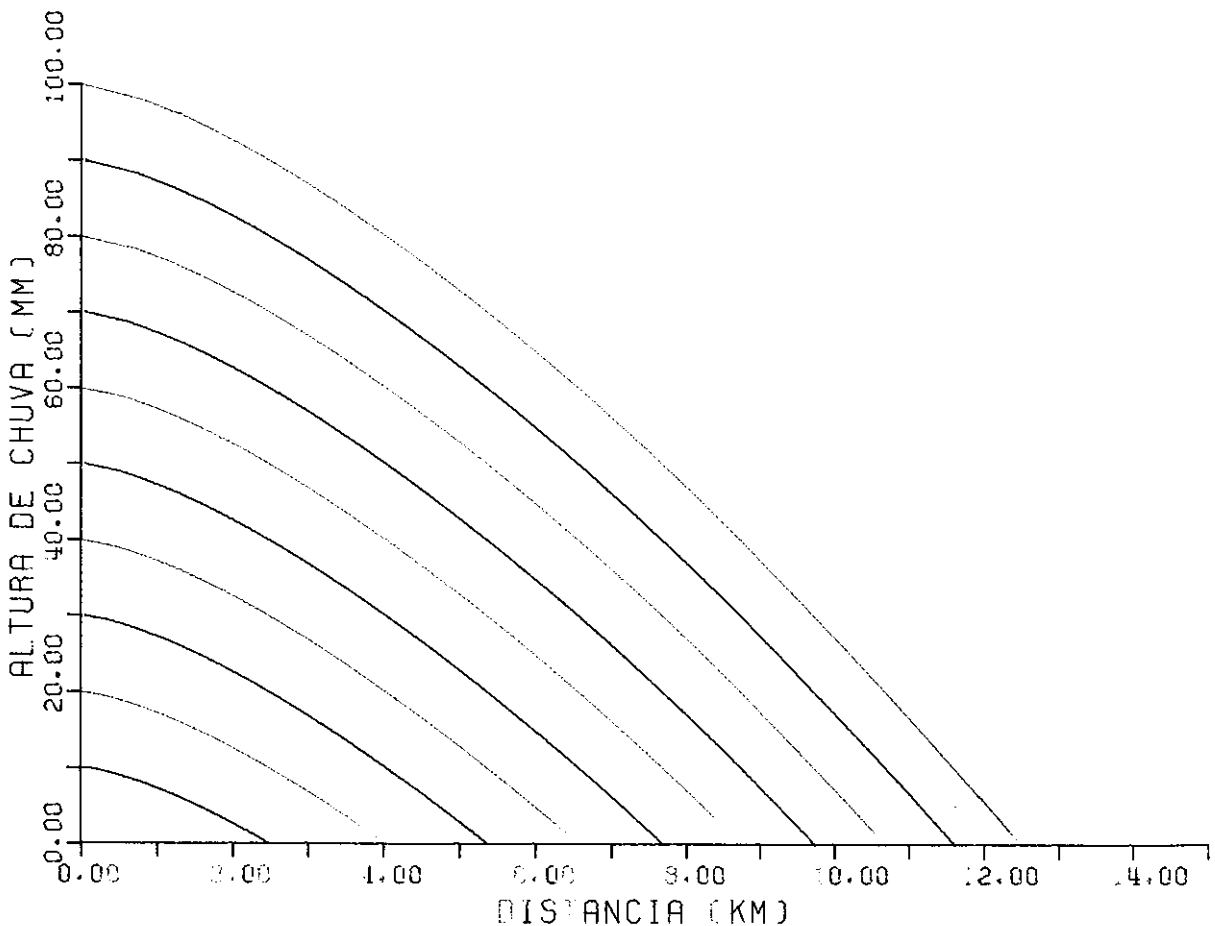


Figura V.19 - Altura de precipitação para uma distância  $r$  do centro da área atingida.

### V.2.2 Função da Correlação com a Distância

#### a) Cálculo da distância característica da correlação ( $d_0$ )

No parágrafo IV.1, foi desenvolvido o cálculo da distância característica da correlação para o modelo de área-altura de Woolhiser e Schwalen, quando se pode aproximar o expoente do termo distância para 1.

Entretanto para a região em estudo o modelo tem um expoente de 1,428 o que não permite uma aproximação para 1,0. Para o modelo encontrado a função de autocorrelação é dada por:

$$\phi_p(|x|) = \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{P_0}{2,71} \right)^{1/1,428} \\ & \quad \left( 1 - \frac{P_0}{2,71} |r| \right)^{1,428} \left( 1 - \frac{P_0}{2,71} (|r-x|) \right)^{1,428} dr \\ & - \left( \frac{P_0}{2,71} \right)^{1/1,428} + x \end{aligned} \right] \quad (V.20)$$

$$\text{para } 0 \leq |x| \leq \left( \frac{P_0}{2,71} \right)^{1/1,428}$$

O coeficiente de autocorrelação normalizado do modelo é dado por:

$${}^0\phi_p(|x|) = \frac{\phi_p(|x|)}{\phi_p(0)} \quad (V.21)$$

e a distância característica da correlação,  $d_0$ , é dada por:

$$\rho_p(|d_o|) = \frac{\rho_p(|d_o|)}{\rho_p(o)} = 0.5 \quad (V.22)$$

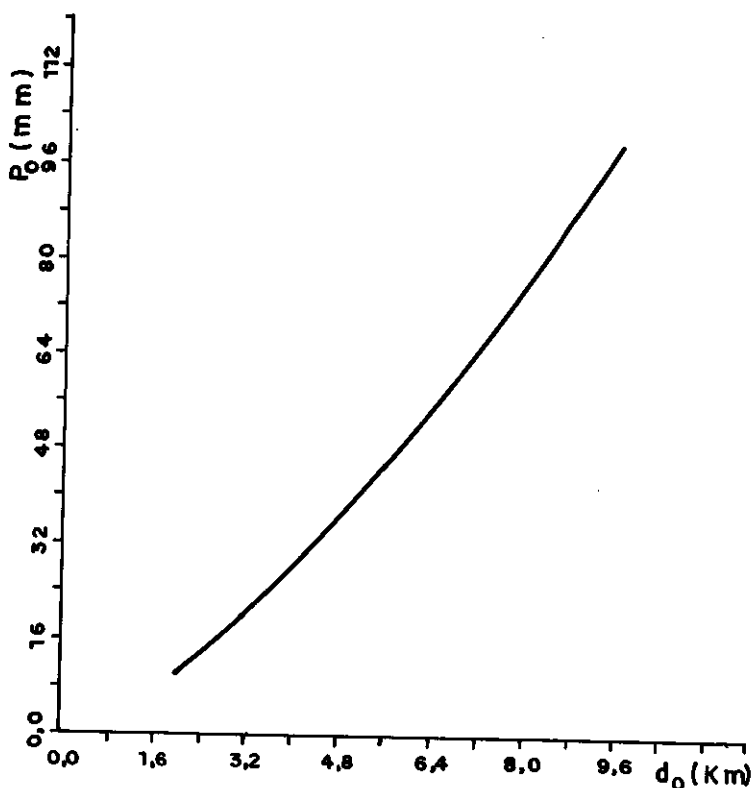


Figura V.20 - Distância característica da correlação em função da precipitação máxima.

A equação (V.22) foi resolvida numericamente para diversos valores de  $P_0$ , estando os resultados apresentados na figura V.20 e na tabela V.5.

#### b) Ajuste da função de correlação com a distância

A partir da distância característica da correlação  $d_0$ , foram ajustadas para diversos valores de  $P_0$  duas funções de cor-

relação com a distância, a função de Bessel:

$$r(d_0) = b d_0 K_1 (b d_0) = 0,5 \quad (V.23)$$

e a função exponencial negativa:

$$r(d_0) = \exp (- h d_0) = 0,5 \quad (V.24)$$

estando os resultados dos ajustes apresentados na tabela V.5.

$P_0$ (mm)	$d_0$ (Km)	B	H
10.	1,917	0,656	- 0,362
20.	3,115	0,404	- 0,223
30.	4,138	0,304	- 0,168
40.	5,061	0,248	- 0,137
50.	5,917	0,212	- 0,117
60.	6,723	0,187	- 0,103
70.	7,490	0,168	- 0,093
80.	8,224	0,153	- 0,084
90.	8,931	0,141	- 0,078
100.	9,615	0,131	- 0,072

Tabela V.5 - Valores dos parâmetros b e h das funções de correlação com a distância, de Bessel e exponencial negativa.

### V.2.3 Objetivos da Rede

Os parâmetros envolvidos no cálculo da eficiência da rede pelos métodos apresentados neste trabalho dependem do valor da precipitação ocorrida no centro da tempestade. Então a seguinte pergunta pode ser feita, uma vez que sua resposta pode levar a configurações diferentes da rede: para qual altura de chuva ocorrida no centro da tempestade deve ser planejada a rede?

A resposta a esta pergunta é a fixação do objetivo para qual a rede será operada. A resposta poderia ser a altura de chuva de maior frequência sobre a área, ou a de maior altura, entre outras.

Como a área em estudo é uma bacia urbana onde as obras hidráulicas são projetadas para chuvas de grande intensidade, o objetivo da rede a ser otimizada será: medir chuvas convectivas com menos de duas horas de duração com altura no centro de 100mm.

A chuva em estudo tem portanto as seguintes características:

a) modelo de área-altura

$$P = 100 - 2,71 r^{1,428} \quad (V.25)$$

b) função de correlação com a distância

$$r(d) = 0,131 d K_1(0,131 d) \quad (V.26)$$

ou

$$r(d) = \exp(-0,072 d) \quad (V.27)$$

#### V.2.4 Otimização da Rede

Considerando que a otimização da rede envolve uma série de integrais sem solução analítica, sendo portanto resolvida através das técnicas de cálculo numérico, para efeito de otimização considerou-se apenas uma parte da área em estudo, com o propósito de diminuir o número de cálculos envolvidos.

A área escolhida tem aproximadamente  $270 \text{ Km}^2$  e está compreendida entre as latitudes de  $22^{\circ} 50' \text{ S}$  e  $23^{\circ} 00' \text{ S}$  e as longitudes de  $43^{\circ} 10' \text{ W}$  e  $43^{\circ} 20' \text{ W}$ . Escolheu-se esta área porque é a que apresenta uma maior densidade de estações instaladas, num total de 15, identificadas pelos códigos P01 a P15 na Figura V.14 e na Tabela V.4.

Para esta área, a consideração que o custo de qualquer rede independe de sua configuração não é muito realista, pois uma pequena parte desta área é formada pela Baía da Guanabara de tal forma que a instalação, manutenção e operação de postos nesta área certamente seria superior aos dos postos instalados na parte terrestre. Este impasse pode ser contornado admitindo que as configurações com postos nesta área não pertencem ao conjunto de soluções viáveis. Todavia, neste estudo foi considerado que para fins de custo todos os pontos da área são iguais podendo, portanto, o custo total da rede ser dado pela equação II.10.

Para o cálculo do erro médio quadrático considerando a rede independente ou não da configuração dos postos foi considerado, como uma boa aproximação, que o peso de cada posto é dado por  $p_i = 1/N$ .

A análise da eficiência da rede existente foi feita sob o enfoque do número de estações equivalentes, parágrafo IV. Inicialmente foi considerado que a precisão da rede é independente da configuração de seus postos de medições, isto é, os postos são localizados sobre a área com uma função densidade de probabilidade uniforme, independente um do outro. Para esta condição a solução do problema é dada pela equação (IV.33), que foi resolvida para diversos valores de N e, para duas funções de correlação com a distância, a de Bessel (V.26) e a exponencial negativa (V.27), estando os resultados apresentados em forma gráfica, respectivamente, nas figuras V.21 e V.22.

Para a situação atual da rede, 15 postos, o fator de redução da variância pontual (equação IV.32) para a função de Bessel é:

$$F_2(15) = 0,0284 \quad (V.28)$$

e para a função exponencial negativa:

$$F_2(15) = 0,0292 \quad (V.29)$$

Desta forma, o erro médio quadrático da estimativa da altura média de precipitação sobre a área, dado pela equação (IV.33), é

$$EMQ = 0,0284 \sigma_p^2 \quad (V.30)$$

para a função de Bessel, e



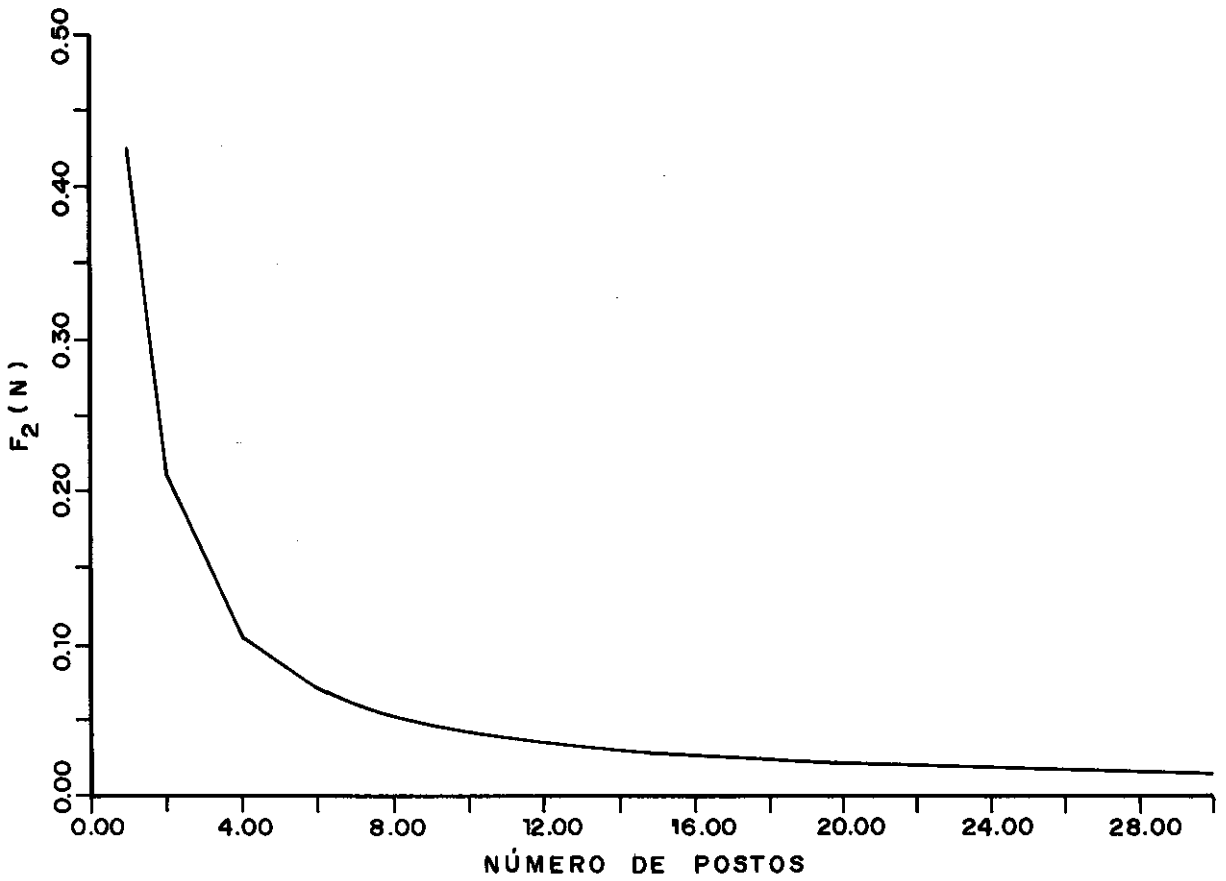


FIGURA V-21 - VALORES DE  $F_2(N)$  PARA A FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DE BESSEL

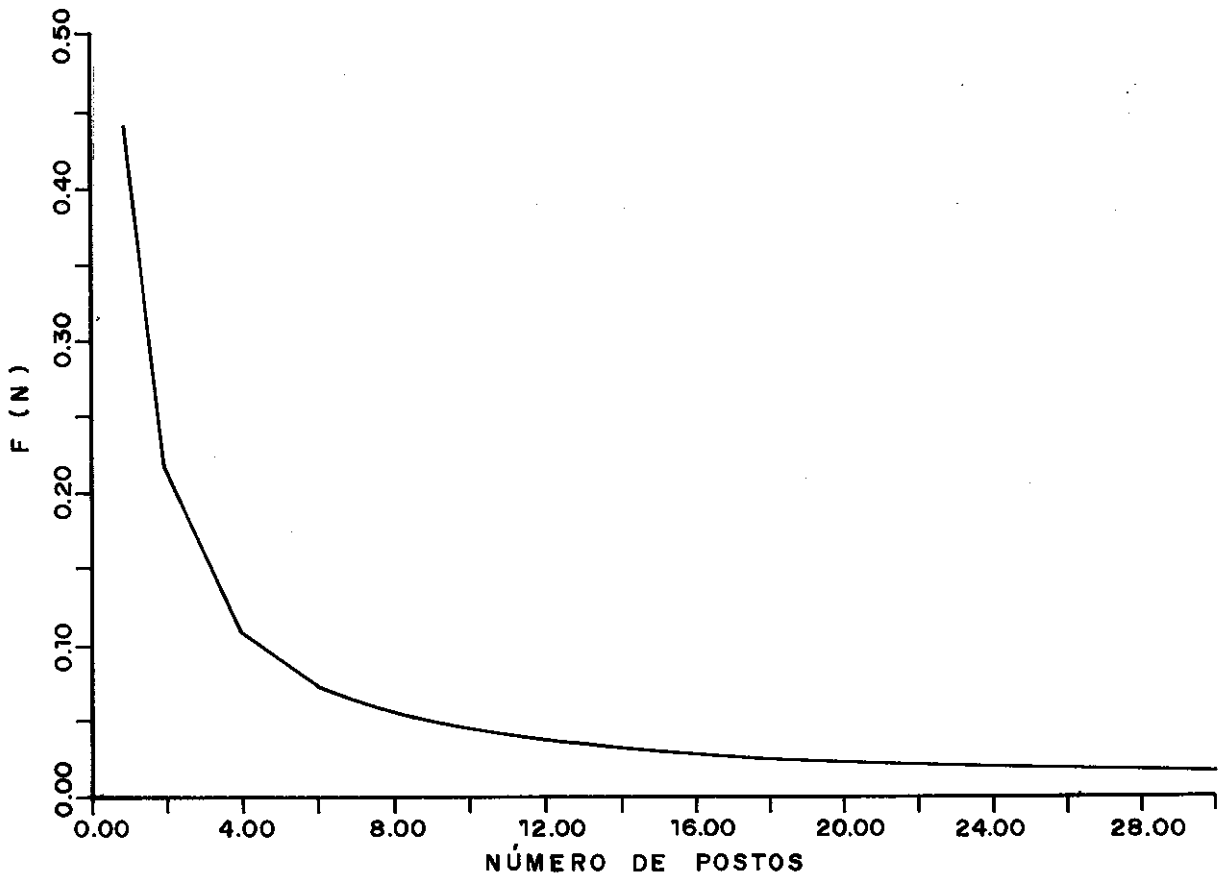


FIGURA V-22 - VALORES DE  $F_2(N)$  PARA A FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO EXPONENCIAL NEGATIVA

$$EMQ = 0,0292 \sigma_p^2 \quad (V.31)$$

para a função exponencial negativa. Em outras palavras, isto quer dizer que: se a altura média da precipitação sobre a área estudada for calculada através da média aritmética dos valores medidos nos postos pluviométricos, o erro médio quadrático da estimativa será de aproximadamente 3% da variância pontual da altura de precipitação, desde que se considere que a configuração da rede tem uma distribuição uniforme com os postos independentes entre si.

Considerando agora a configuração real da rede, e expressando a função de correlação com a distância pela função de Bessel (V.26), o erro médio quadrático dado pela equação (IV.40) é igual a:

$$EMQ = E \left[ \bar{U}, N, \bar{p} \right] = 0,064 \sigma_p^2 \quad (V.32)$$

Medindo a eficiência da atual configuração da rede pelo número de estações equivalentes, temos que:

$$n_{eq} = \frac{0,426}{0,064} \cong 7 \text{ postos} \quad (V.33)$$

Ora, como  $N > n_{eq}$  pode-se dizer que a configuração da atual rede é inferior a normal, isto é, a rede atual tem o mesmo erro de estimativa que teria uma rede com 7 postos distribuídos, independentes entre si, uniformemente.

Como consequência desta comparação podemos afirmar que a atual configuração da rede necessita de uma otimização, que é a solução do problema dado por (IV.52), isto é:

$$\min_{\bar{U}} G(\bar{U}, 15) \quad (V.34)$$

O problema acima e os demais propostos neste texto foram resolvidos admitindo que não mais que 5% do espaço de soluções do problema contenha valor melhor que o adotado como ótimo, e com uma probabilidade de 95% de que no mínimo uma das soluções caiu no espaço de soluções ótimas. De acordo com a tabela IV.1, para satisfazer a estas condições devem ser realizadas 59 tentativas.

Na figura V.23 é apresentada a configuração da rede existente e da rede otimizada. Ao comparar as duas configurações verifica-se que para a rede otimizada os postos estão mais espalhados sobre a área. A rede otimizada tem um erro médio quadrático de  $0,008 \sigma_p^2$ , e é equivalente a uma rede uniformemente distribuída, com os postos independentes entre si, de 53 estações.

Um outro tipo de problema que pode ser proposto é: Qual a configuração da rede, com o menor número de postos, que tem um erro máximo de 2% da variância pontual.

A solução foi encontrada por enumeração resolvendo o problema dado por (IV.52) para os seguintes valores de

$N_0$  { 15, 13, 11, 9, 7, 5 } postos. Na tabela V.6 são apresentados o erro médio quadrático e o número de estações equivalentes para cada uma das configurações otimizadas constantes das figuras V.27 a V.28, correspondentes a cada um dos valores de  $N_0$ .

$N_0$	$EMQ/\sigma_p^2$	$n_{eq}$
15	0,008	53
13	0,008	53
11	0,010	43
9	0,009	47
7	0,016	27
5	0,025	17

TABELA V.6 - Erro médio quadrático e número de estações equivalentes das redes otimizadas

Pelos resultados constantes da tabela o problema proposto tem como solução uma rede de 7 postos pluviográficos com a configuração apresentada na figura V.27.

#### V.2.5 Síntese dos Resultados

- a) Apesar do baixo número de eventos analisados (11), a fórmula de área-altura proposta por Woolhiser e Szghwalen é a que melhor representa as chuvas convectivas e/ou orográficas de verão, com duração inferior a duas horas, na cidade do Rio de Janeiro.

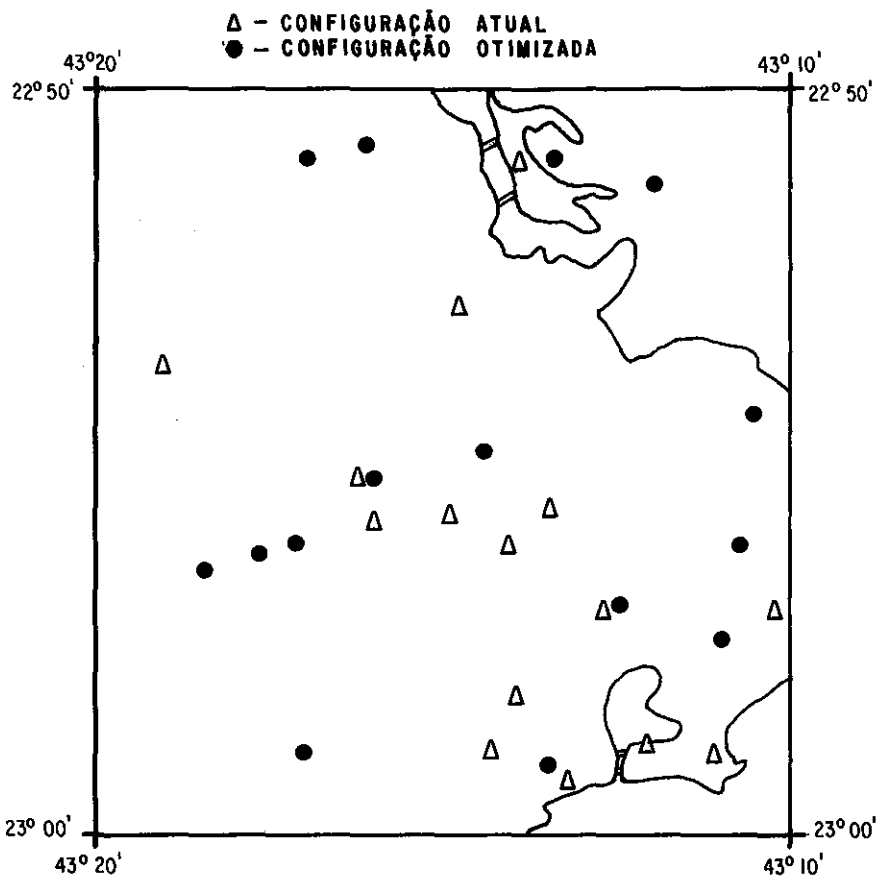


FIGURA V-23 - CONFIGURAÇÃO ATUAL DA REDE E CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 15 POSTOS

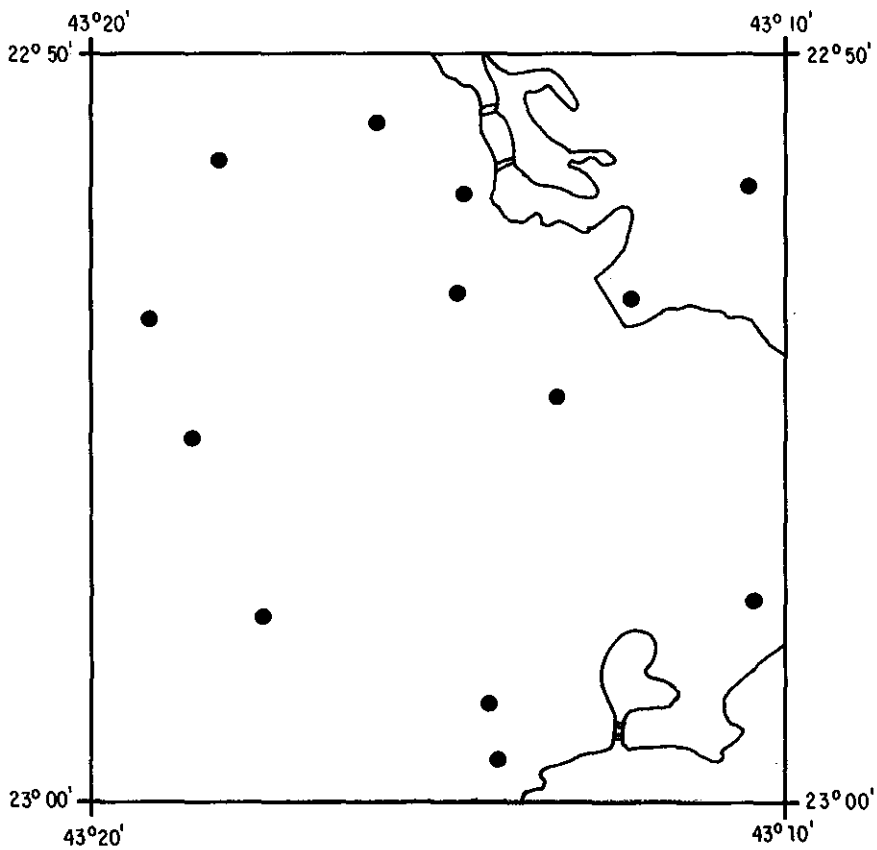


FIGURA V-24 - CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 13 POSTOS

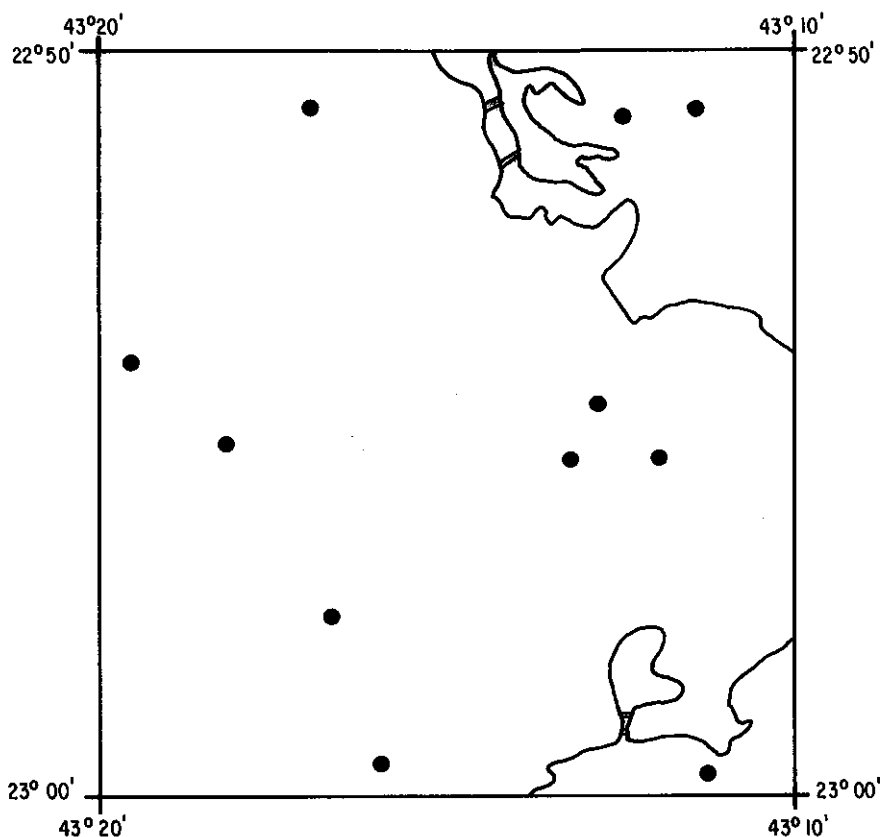


FIGURA V-25 - CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 11 POSTOS

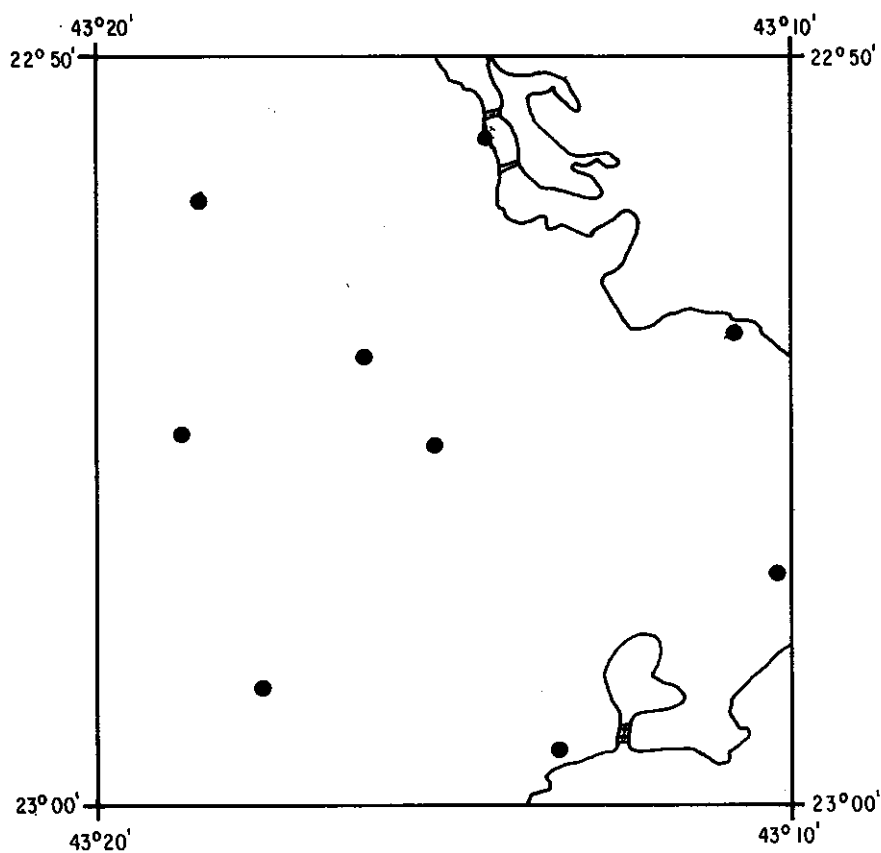


FIGURA V-26 - CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 9 POSTOS

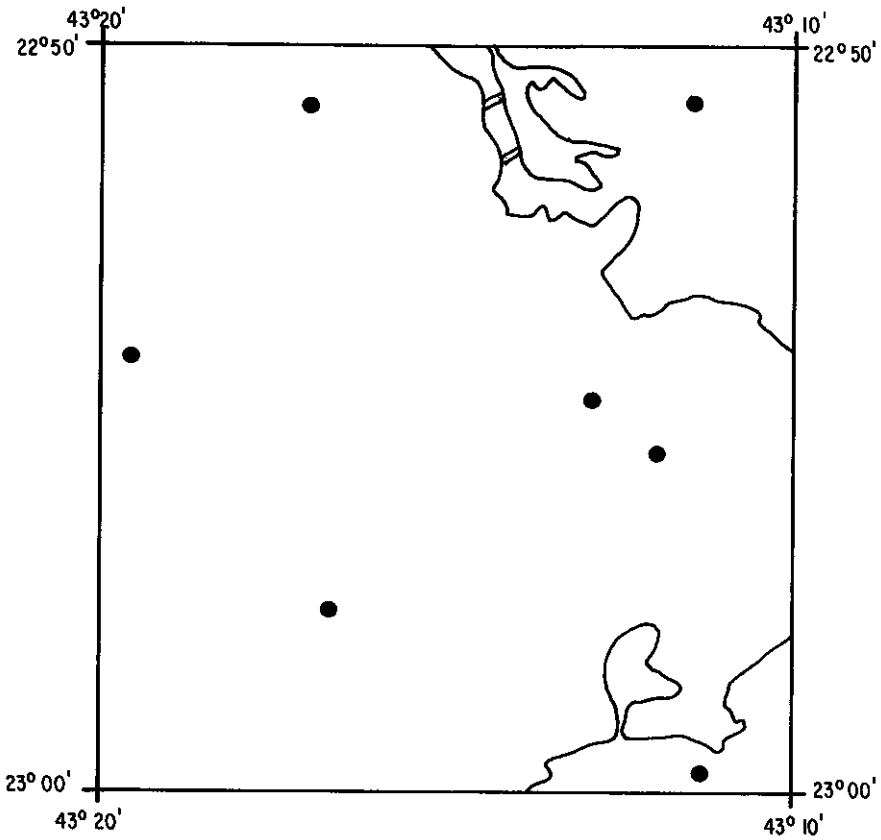


FIGURA V-27 - CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 7 POSTOS

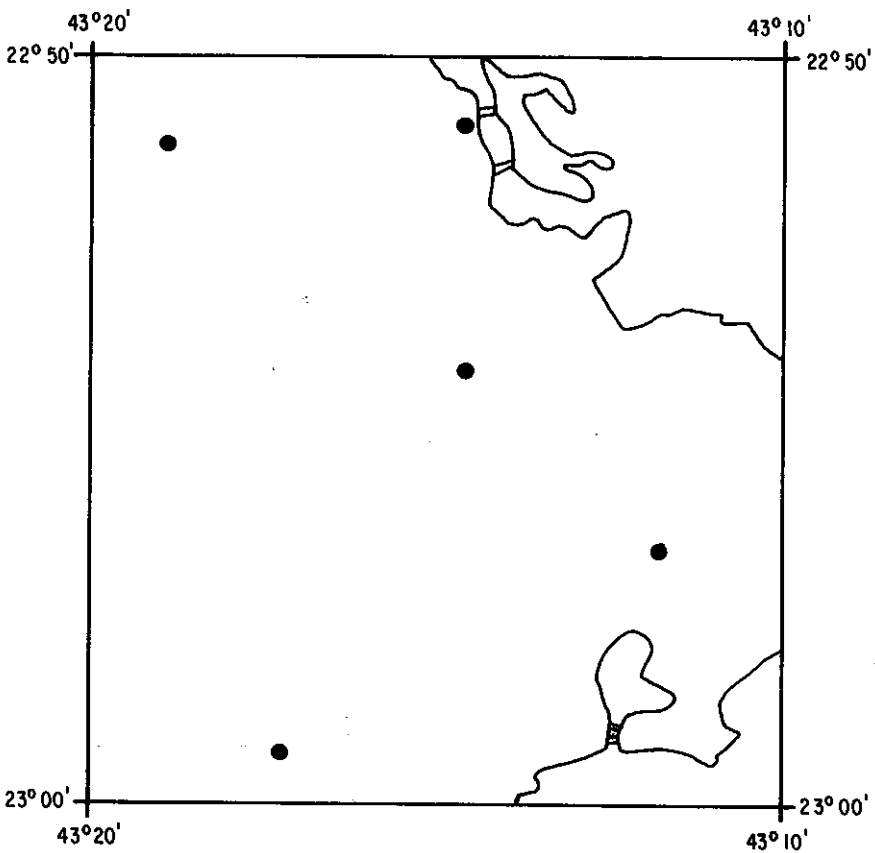


FIGURA V-28 - CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA PARA 5 POSTOS

- b) Se for utilizada para estimar a altura média sobre a área de uma precipitação com as características da estudada, a atual configuração dos 15 postos instalados na área analisada, tem um erro equivalente ao de uma rede com 7 postos distribuídos, independentes entre si, uniformemente.
- c) Para as condições estudadas, a configuração otimizada, com 15 postos, apresentada na figura V.23 equivale ao de uma rede uniformemente distribuída de 53 estações, desde que se considere os postos independentes entre si.
- d) A configuração otimizada, de 7 postos, apresentada na figura V.27 estima a altura média, sobre a área, da precipitação estudada com um erro médio quadrático de 2% da sua variância pontual. Este erro equivale ao de uma rede com 27 postos uniformemente distribuídos.



## VI. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos permitiram chegar às seguintes conclusões:

1. Sobre o dimensionamento de redes com o objetivo de estimar a média de longo termo da altura de precipitação anual sobre uma área.

- a) O ajuste das funções da correlação com a distância em áreas homogêneas e isotrópicas pode ser feito usando todos os pontos ou agrupando-os, uma vez que as funções obtidas se assemelham muito nos dois casos. Para a aplicação feita a função proposta por Kagan foi a que melhor se ajustou aos dados observados.
- b) Para a área em estudo as metodologias indicaram que para a estimativa da média de um longo período de tempo da altura de precipitação anual sobre a área, pode ser feita com uma precisão suficiente usando um número de postos inferior ao recomendado pela Organização Meteorológica Mundial.
- c) O ajuste da função de Bessel a partir da função exponencial negativa, utilizando o conceito de distância característica de correlação, leva ao mesmo resultado o planejamento da rede feito pelo método dos fatores de redução da variância.

- d) As metodologias de planejamento e otimização empregadas são aplicáveis a uma massa de dados. Entretanto para áreas onde é difícil estabelecer a função de correlação com a distância é recomendável o uso do método de integração da superfície de precipitação.
- e) O método de integração da superfície de precipitação possibilita avaliar o impacto da desativação de postos pluviométricos.
- f) A representação da superfície de precipitação média anual através do modelo de interpolação da superfície multiquadrática cônica circular reta, parece ser mais adequada que os outros modelos empregados neste trabalho.

2. Sobre o planejamento de redes para medir a média sobre a área da altura de precipitação de uma tempestade isolada.

- a) O modelo de área-altura proposto por Woolhiser e Szchwalem é o que melhor representa as chuvas convectivas e/ou orográficas de verão, com duração inferior a duas horas, na cidade do Rio de Janeiro.
- b) As metodologias de otimização discutidas neste trabalho são aplicáveis a uma massa de dados coletados em áreas onde a função de correlação com a distância é isotrópica.
- c) Na metodologia de otimização de rede que considera implicitamente a sua configuração, o resultado obtido é o mesmo quer se considere a função de correlação com a distância dada por uma equação exponencial negativa ou modificada de Bessel.

- d) A eficiência de uma rede pluviométrica pode ser analisada aplicando simultaneamente as duas metodologias de otimização apresentadas neste trabalho.
- e) Em problemas de otimização onde não é possível a busca do "ótimo" pelos métodos de gradiente, o método de busca aleatória permite que se determine a solução ótima dentro de uma dada probabilidade.
- f) Para as condições desse estudo a atual configuração dos 15 postos analisados equivale a uma configuração de 7 postos, independentes entre si uniformemente distribuídos. A configuração de 15 postos otimizada, apresentada na figura V.23, equivale a uma configuração de 53 estações independentes entre si, uniformemente distribuídas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ackerman, B., Characteristics of summer radar echoes in Arizona. Arizona, Univ. Ariz. Inst. Atmos. Phys. Rep.11, 1959, 66 pp., citado em Fogel et al. (1969).
2. Alexeev, G.A., Optimal spatial interpolation and its errors in case of various distances between observational points or watershed centers, International symposium on Mathematical Models in Hydrology, 1971.
3. Biswas, A.K. History of Hydrology, Amsterdam, North-Holland Publishing company, 1970.
4. Boyer, M.C., A correlation of the characteristics of great storms, Trans. Am. Geophys. Union, 1957, 38, 233-238.
5. Bras, R.F. e Rodrigues-Iturbe, I. Network design for the estimation of areal mean and rainfall events, Water Resources Research, 1976, 12(6), 1185-1195.
6. Brooks, S.H., A comparison of maximum-seeking methods, 1958, 430-457.
7. Caffey, J.E. Interstation correlation in annual precipitation and annual effective precipitation, Hydrology Paper, Colorado State University, Fort Collins, 1965, nº 6.

8. Clarke, R.T. e Edwards, K.A. The application of the analysis of variance to mean areal rainfall estimation, Journal of Hydrology, 1975, 15; 97-112.
9. Court, A. Area-depth rainfall formulas, Journal of Geophysical Research, 1961, 66(6), 1823-1831.
10. Dean, J.D. e Snyder, W.M. Temporally and areally distributed rainfall, Journal of the irrigation and drainage division, 1977, 221-229.
11. DNAEE. Inventário das estações pluviométricas; atualizado até junho de 1979, Brasília, Departamento Nacional de Águas e Energia Elétrica, 1979.
12. Eagleson, P.S., Optimum density of rainfall networks. Water Resources Research, 1967, 3(4), 1021-1033.
13. Eagleson, P.S., Dynamic Hydrology, New York, McGraw-Hill Book Company, 1970.
14. Fogel, M.M. e Duckstein, L., Point rainfall frequencies in convective storms, Water Resources Research, 1969, 5(6), 1229-1237.
15. Gandin, L.S. Objective analysis of meteorological fields, Leningrad, 1963 (Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965).

16. Gandin, L.S. e Kagan, R.L. The economic approach to the planning of a network of meteorological station, Soviet Hydrology: Selected Papers, 1967, nº 6, 597
17. Ghosh, B., Random distances within a rectangle and between two rectangles, Bulletin Calcutta Math. Soc., 1951, 13, 17-24.
18. Hardy, R.L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of Geophysical Research, 1971, 76(8), 1905-1915.
19. Horton, R.E., Discussion of 'The distribution of intense rainfall and some other factors in the design of storm-water drains', by Frank A. Marston, Proc. Am. Soc. Civil Engrs., 1924, 50, 660-667, citado em Court (1961).
20. Jones, D.A., Gurney, R.J. e O'Connell, P.E. Network design using optimal estimation procedures, Water Resources Research, 1979, 15(6).
21. Kagan, R.L., An evaluation of the representativeness of precipitation data, Works of the Main Geophysical Observatory 1966, vol. 191, citado em Kagan, 1972.
22. Kagan, R.L. Planning the spatial distribution of hydrometeorological stations to meet an error criterion, Casebook on hydrological network design practice, World Meteorological Organization, Geneva, WMO nº 324, 1972.

23. Karazev, I.F., Principles for distribution and prospects for development of a hydrologic networks, Soviet Hydrology: Selected Papers, 1968(6).
24. Langbein, W.B. National networks of hydrological data. Proc. WMO/IASH Symposium on the design of hydrological networks, IASH publication n° 67, Quebec, 1965, 5-11.
25. Lenton, R.L. e Rodrigues-Iturbe, I. Rainfall network systems analysis: The optimal estimation of total areal storm depth, Water Resources Research, 1977, 13(5), 825-836.
26. Matern, B., Spatial Variation, Medd. Statens skogsforskningsinst swed., 1960, 49(5), citado em Rodrigues-Iturbe et al (1974)
27. Moss, M.E. e Villeneuve, J.P. Consultant's report on network design for hydrometeorological data for the Plan Nacional Hidraulico of Mexico, 1975.
28. OMM. Guide to hydrological practices, World Meteorological Organization, Geneva, WMO n° 168 T.P. 82, 1975.
29. Osborn, H.B. e Reynolds, W.N., Convective storm patterns in the southwestern United States, Bulletin of the International Association of Hydrological Sciences, 1963, 8, 73-83.
30. Rodda, J.C. et al. Hydrologic network design-Needs, problems and approaches. WMO/IHD Report n° 12, World Meteorological Organization, Geneva, 1969, 57 pp.

31. Rodríguez-Iturbe, I. e Mejía, J.M. The design of rainfall networks in time and space, Water Resources Research, 1974, 10(4), 713-728.
32. Shaw, E.M. e Lynn, P.P. Areal rainfall evaluation using two surface fitting techniques, Bulletin of the International Association of Hydrological Sciences, 1972, XVII(4).
33. Shaw, E.M. e O'Connell, P.E. Design of networks and data transfer for precipitation, Hydrological Network Design and Information Transfer, World Meteorological Organization, Genebra, WMO nº 433. TR.8, 1976, 129-150.
34. Solomon, S.I. Multi-regionalization and network strategy, Casebook on hydrological network design practice, World Meteorological Organization, Genebra, WMO nº 324, 1972.
35. Woolhiser, D.A. e Schwalen, H.C., Area-depth-frequency relations for thunderstorm rainfall in southern Arizona, Tech. Paper 527, Agr. Eng. Dept., Ariz. Agr. Expt. Sta., Univ. Ariz., 1959, 7pp, citado em Court (1961).
36. Yevjevich, V. Fluctuations of wet and dry years, Part.II: Analysis by serial correlation, Hydrology Paper, Colorado State University, Fort Collins, 1964, nº 4.